

**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 3.**  
**Касательные векторы и поля,**  
**дифференциал отображения. 17.09.2019.**

**Задача 1.** Рассмотрим окружность  $\mathbb{S}^1$ , заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку  $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Найти базис в касательном пространстве  $T_P\mathbb{S}^1$  в терминах объемлющего пространства  $\mathbb{R}^2$ .

**Задача 2.** Описать в терминах объемлющего пространства  $\mathbb{R}^3$  касательное пространство  $T_P\mathbb{S}^2$  к сфере  $\mathbb{S}^2$ , заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

**Задача 3.** Пусть  $X$  такой касательный вектор в точке  $P$  из предыдущей задачи, что его координаты, соответствующие стереографической проекции из северного полюса равны  $(1, 1)$ . Найти координаты этого вектора, соответствующие стереографической проекции из южного полюса.

**Задача 4.** Рассмотрим точку  $P$  и вектор  $X$  из предыдущих двух задач. Пусть  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ограничение функции  $z$  на сферу. Найти  $Xf$ .

**Задача 5.** Рассмотрим на стандартной сфере  $\mathbb{S}^2$ , заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

функцию  $f(x, y, z) = z$ . Запишите эту функцию в локальных координатах  $u, v$ , соответствующих стереографической проекции из северного полюса. Найдите её дифференциал  $df$  в этих координатах. Найдите значение  $d_P f(X)$  этого дифференциала в точке  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  на касательном векторе  $X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ . Сравните результат с результатом предыдущей задачи.

**Задача 6.** Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Записать векторные поля  $X = \frac{\partial}{\partial r}$  и  $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$  в базисе  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в данном базисе.

**Задача 7.** Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть  $f : M \rightarrow N$  гладкое отображение многообразий, такое, что в точке  $p \in M$  отображение  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность  $U$  точки  $p$ , что отображение  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  является диффеоморфизмом на открытое множество  $\psi(U)$ .

**Задача 8.** Пусть  $M$  многообразии размерности  $k$ , а  $f_1, \dots, f_k$  такие функции на  $M$ , что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке  $p \in M$ . Доказать, что в некоторой окрестности точки  $p$  функции  $f_1, \dots, f_k$  можно взять в качестве локальных координат.

**Задача 9.** Пусть  $M$  многообразии размерности  $k$ , а  $f_1, \dots, f_l, l < k$ , такие функции на  $M$ , что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке  $p \in M$ . Доказать, что в некоторой окрестности точки  $p$  функции  $f_1, \dots, f_l$  можно дополнить до системы локальных координат.

**Задача 10.** Пусть  $f : M \rightarrow N$  гладкое отображение многообразий, такое, что в точке  $p \in M$  отображение  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  сюръективно. Доказать, что если в окрестности  $f(p) \in N$  функции  $x^1, \dots, x^l$  образуют локальную систему координат, то функции  $x^1 \circ f, \dots, x^l \circ f$  можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки  $p$ .