НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 8.
Когомологии де Рама-II. 5.11.2019.

В данном листке под когомологиями подразумеваются исключительно когомологии де Рама. При решении задач данного листка запрещено использовать изоморфизмы с другими когомологиями.

Задача 1. *(Лемма о пяти гомоморфизмах).* Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

из абелевых групп и их гомоморфизмов, такую что горизонтальные стрелки образуют две точные последовательности. Докажите, что если a, b, d, e являются изоморфизмами, то c тоже изоморфизм.

Задача 2. Найдите когомологии $\mathbb{CP}^n$.

Задача 3. Найти кольцо когомологий $\mathbb{RP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{RP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях).

Задача 4. Найти когомологии двумерной сферы с g приклеенными ручками.

Задача 5. Найти когомологии бутылки Клейна $\mathbb{K}\mathrm{l}$.

Задача 6. Найти когомологии $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ (дополнение к окружности в трехмерном пространстве).

Задача 7. Найти когомологии $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ (дополнение к окружности в трехмерной сфере).

Задача 8*. Докажите лемму Пуанкаре для когомологий с компактным носителем: $H_c^k(M \times \mathbb{R}^1) = H_c^{k-1}(M)$. *Указание.* Пусть t обозначает стандартную координату на $\mathbb{R}$. Рассмотрите отображение послойного интегрирования $\pi_* : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega_c^{k-1}(M)$, которое формы без dt переводит в ноль, а формы с dt интегрирует $\int_{\mathbb{R}^1}$. Пусть $e = e(t)dt$ такая форма с компактным носителем на $\mathbb{R}^1$, что $\int_{\mathbb{R}^1} e = 1$. Рассмотрите отображение $e_* : \Omega_c^{k-1}(M) \longrightarrow \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1)$, это просто операция умножения на e. В качестве оператора гомотопии рассмотрите оператор $K : \Omega_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega_c^{k-1}(M \times \mathbb{R}^1)$, который переводит формы без dt в ноль, а формы с dt он преобразует так:

$$\omega \mapsto \int\limits_{-\infty}^{t} \omega - \int\limits_{-\infty}^{t} e \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega.$$

Задача 9. Найдите когомологии с компактным носителем листа Мебиуса.

Задача 10*. Пусть M^n гладкое компактное ориентированное многообразие без края, ω — n-форма на M, а $\varphi : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ гладкая функции. Положим $M_c = \{x | \varphi(x) \leqslant c\}$.

Предположим, что $c_0 \in \mathbb{R}$ такое число, что $\varphi(x) = c_0 \Longrightarrow d\varphi(x) \neq 0$. Тогда M_{c_0} — многообразие с краем, и M_c — тоже многообразие с краем для всех c их некоторой окрестности c_0.

Пусть

$$F(c) := \int_{M_c} \omega.$$

Доказать, что $F(c)$ является гладкой функция от c и производная $\dfrac{dF(c)}{dc}$ может быть представлена в виде интеграла $\int\limits_{\partial M_c} \tilde{\omega}$ от некоторой $n-1$-формы $\tilde{\omega}$. Найти $\tilde{\omega}$.