Обыкновенные дифференциальные уравнения 2019, листок 1

Задача 1. Доказать, что внутренности квадрата, круга и полукруга попарно диффеоморфны.

Задача 2. Являются ли следующие отображения диффеоморфизмами плоскости $\mathbb{R}^2$
а) $(x, y) \mapsto (2y, x + y^2)$; $(x, y) \mapsto (y + \varepsilon sin(y), cos(y) + x)$

Задача 3. Докажите (локальную) единственность решения для дифференциальных уравнений на прямой $\dot{x} = 0$, $\dot{x} = 1$ и $\dot{x} = kx$.

Задача 4. а) Запишите векторное поле $\frac{\partial}{\partial x}$ в полярных координатах. Запишите векторное поле $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ в декартовых координатах.

б) Рассмотрим отображение $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-y + x^2, 2x)$. Докажите, что F – диффеоморфизм и найдите $F_* v$ для $v = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

Задача 5. Пусть матрица $\varphi(t)$ гладко зависит от t, ортогональна при любом t и $\varphi(0) = E$. Докажите, что ее вектор скорости в нуле – кососимметрическая матрица.

Задача 6. Найдите $L_v f$ для $f = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, f - однородный многочлен степени n.

Задача 7. Найдите формулу для коммутатора векторных полей $\sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x}$ и $\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x}$.

Задача 8. Проверьте тождество Якоби $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

Задача 9. Существует ли в пространстве векторных полей на прямой трехмерное подпространство, замкнутое относительно коммутирования?