

Задача 1. Докажите, что диффеоморфизм g переводит решения дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ в решения дифференциального уравнения $\dot{y} = g_*v(y)$.

Задача 2. Может ли образ (бесконечно) гладкого пути совпадать с кривой, имеющей изломы (например, с графиком модуля на плоскости)? Может ли траектория однопараметрической группы диффеоморфизмов иметь изломы?

Задача 3. Найти фазовые потоки векторных полей $v(x)$ на прямой, $v(x) = 0, -1, 2x-1$; на интервале $] -\pi/2, \pi/2[$, $v(x) = \cos(x)$.

Задача 4. Найти фазовые потоки векторных полей на плоскости, $v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$, $v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $v(x, y) = \sin y \frac{\partial}{\partial x}$.

Задача 5. Рассмотрим преобразования g^t пространства многочленов степени не выше данной: $g^t p(x) = p(x+t)$. Являются ли эти преобразования фазовым потоком? Если являются, то найдите скорость этого потока.

Задача 6. Запишите систему в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Решите ее, нарисуйте образы решений в исходных и полярных координатах. Все ли решения продолжаются неограниченно на положительное (отрицательное время)?