

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЗАДАЧИ В.И. АРНОЛЬДА

В квадратных скобках указано число очков за задачу.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos t.$$

*Задача 1.* Линеаризовать это уравнение в точке  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$  [1].

*Задача 2.* Устойчиво ли это положение равновесия [1]?

*Задача 3.* Найти матрицу Якоби преобразования фазового потока за время  $t = 2\pi$  в точке  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$  [3].

*Задача 4.* Найти производную решения с начальным условием  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$  по параметру  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$  [5].

*Задача 5.* Нарисовать графики решения и его производной по  $t$  при начальном условии  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 2$  [3].

*Задача 6.* Найти это решение [3].

Пусть (\*) – уравнение в вариациях вдоль указанного в пятой задаче решения.

*Задача 7.* Имеет ли уравнение (\*) неограниченные решения [8]?

*Задача 8.* Имеет ли уравнение (\*) ненулевые ограниченные решения [8]?

*Задача 9.* Найти определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (\*), зная, что  $W(0) = 1$  [5].

*Задача 10.* Выписать явно уравнение (\*) и решить его [10].

*Задача 11.* Найти собственные числа и векторы оператора монодромии для уравнения в вариациях вдоль решения с начальным условием  $x = \pi/2$ ,  $\dot{x} = 0$  [16].

*Задача 12.* Доказать, что исходное уравнение имеет  $2\pi$ -периодическое решение, гладко зависящее от  $\varepsilon$  и обращающееся в  $x = \pi$  при  $\varepsilon = 0$  [6].

*Задача 13.* Найти производную этого решения по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$  [6].

Рассмотрим уравнение

$$u_t + uu_x = -\sin x.$$

*Задача 14.* Написать уравнение характеристик [2].

*Задача 15.* Найти наибольшее значение  $t$ , при котором решение задачи Коши с  $u|_{t=0} = 0$  продолжается на  $[0, t[$  [8].