ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Сингулярные гомологии и когомологии.

Стандартным симплексом размерности n называется множество $\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0, \dots, x_n \ge 0, x_0 + \dots + x_n = 1\}$. *Сингулярным n-симплексом* топологического пространства X называется непрерывное отображение $f : \Delta_n \to X$. Сингулярной цепью с коэффициентами в кольце K (ассоциативном, коммутативном и с единицей) называется элемент свободного K-модуля $C_n(X, K)$, порожденного всеми сингулярными n-симплексами в X. Сингулярной коцепью называется элемент K-модуля $\operatorname{Hom}(C_n(X, K), K)$. Иными словами, сингулярная цепь это формальная линейная комбинация (с коэффицентами из K) конечного числа сингулярных симплексов, а сингулярная коцепь — функция на множестве сингулярных симплексов со значениями в K.

Гранью симплекса Δ_n называется подмножество $\Delta_{n,i} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0\}$; здесь $0 \le i \le n$. Обозначим $u_{i,n-1} : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ аффинное отображение, действующее по формуле $u_{i,n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$; оно является биекцией $\Delta_{n-1} \to \Delta_{n,i}$. Определим теперь отображение ∂_n из множества сингулярных n-симплексов в $C_{n-1}(X, K)$ формулой $\partial_n(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^n f \circ u_{i,n-1}$; продолжим его по “$K$-линейности”до гомоморфизма модулей $C_n(X, K) \to C_{n-1}(X, K)$. Также определим оператор $d_n : C^n(X, K) \to C^{n+1}(X, K)$ как двойственный к ∂_{n+1}: $d_n(\varphi)(f) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\partial_{n+1} f)$, где $\varphi \in C^n(X, K)$, $f \in C_{n+1}(X, K)$.

Лемма. *$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, $d_n \circ d_{n-1} = 0$ для всех n и произвольного топологического пространства X.*

Доказательство. Очевидно, эти два равенства эквивалентны; докажем первое. Для произвольного сингулярного симплекса $f : \Delta_{n+1} \to X$ имеем $\partial_n(\partial_{n+1}(f)) = \partial_n(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f \circ u_{i,n}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} f \circ u_{i,n} \circ u_{j,n-1}$. Как нетрудно проверить, $u_{i,n} \circ u_{j,n-1} = u_{j,n} \circ u_{i-1,n-1}$ при $i > j$ и $u_{i,n} \circ u_{j,n-1} = u_{j+1,n} \circ u_{i,n-1}$ при $i \le j$. Тем самым члены суммы разбиваются на пары, имеющие противоположный знак, так что вся сумма равна нулю. □

Напомним, что *цепным компле́ксом* называется последовательность (конечная или бесконечная) K-модулей и их гомоморфизмов (называемых дифференциалами) вида

$$M. = \dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} M_i \xrightarrow{\partial_i} M_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots,$$

где $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ для любого i. *i-циклами* называются элементы подмодуля $Z_i \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_i \subset M_i$, т.е. элементы $x \in M_i$ такие, что $\partial_i(x) = 0$; *i-границами* — элементы подмодуля $B_i = \operatorname{Im} \partial_{i+1} \subset M_i$, т.е. элементы $x \in M_i$, для которых существует $y \in M_{i+1}$ такой, что $x = \partial_{i+1}(y)$. Условие $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ эквивалентно тому, что $B_i \subset Z_i$. Фактор-модуль $H_i \stackrel{\text{def}}{=} Z_i/B_i$ называется *i-ми гомологиями* комплекса. *Коцепным комплексом* называется такая же последовательность, в которой индексы возрастают: $d_i : M^i \to M^{i+1}$, и $d_{i+1} \circ d_i = 0$; модуль $H^i(M) = \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i-1} = Z^i(M)/B^i(M)$ называется в этом случае i-ми когомологиями.

Тем самым последовательность K-модулей и гомоморфизмов $\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, K) \to 0$ является цепным комплексом, а последовательность $\dots \xleftarrow{d_n} C^n(X, K) \xleftarrow{d_{n-1}} C^{n-1}(X, K) \xleftarrow{d_{n-2}} \dots \xleftarrow{d_0} C^0(X, K) \leftarrow 0$ — коцепным комплексом свободных K-модулей. Гомологии (соотв., когомологии) этих комплексов называются сингулярными гомологиями (соотв., когомологиями) пространства X с коэффициентами в K и обозначаются $H_i(X, K)$ (соотв., $H^i(X, K)$). Часто обозначают $H_*(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \ge 0} H_n(X, K)$ и $H^*(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \ge 0} H^n(X, K)$.

Пример 1. Пусть $X = \mathrm{pt}$ — пространство, состоящее из одной точки. Тогда $C_n(\mathrm{pt}, K) = K$ для всех n; дифференциал $\partial_n : K \to K$ — нулевой при нечетном n и единичный при четном (поскольку количество граней в Δ_n равно $n + 1$ и в определении ∂_n знаки чередуются). Отсюда вытекает, что $H_0(\mathrm{pt}, K) = K$ и $H_n(\mathrm{pt}, K) = 0$ при всех $n > 0$. Нетрудно проверить, что для когомологий результат такой же.

Пример 2. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Для каждого элемента $x = \sum k_i f_i \in C_0(X, K)$ положим $\epsilon(x) = \sum k_i \in K$; тем самым $\epsilon : C_0(X, K) \to K$ — гомоморфизм модулей. Если $g : \Delta_1 \to X$ — сингулярный 1-симплекс, то $\partial_1 g = g(a) - g(b)$, где $a = (1, 0)$ и $b = (0, 1)$ — концы отрезка Δ_1. Отсюда вытекает, что $\epsilon(\partial_1(g)) = 0$, а в силу гомоморфности получаем $\operatorname{Im} \partial_1 \subset \operatorname{Ker} \epsilon$. Обратно, пусть $\epsilon(x) = 0$, где $x = \sum_{i=1}^N k_i f_i$, $f_i : \Delta_0 \to X$ — сингулярные 0-симплексы, и все $k_i \ne 0$ (иначе нет смысла включать соответствующее слагаемое в сумму). Стандартный симплекс Δ_0 — точка, так что образ f_i — также точка.

Поскольку пространство X линейно связно, существуют сингулярные 1-симплексы $g_1, \dots, g_{N-1}$ такие, что $\partial_1(g_i) = f_i - f_{i+1}$. Тогда $x = k_1(f_1 - f_2) + (k_1 + k_2)(f_2 - f_3) + \dots + (k_1 + \dots + k_{N-1})(f_{N-1} - f_N) = \partial_1(k_1 g_1 + (k_1 + k_2)g_2 + \dots)$. Тем самым $\operatorname{Im}\partial_1 = \operatorname{Ker}\epsilon$, откуда $H_0(X, K) = C_0(X, K)/\operatorname{Ker}\epsilon = K$.

Пример 3. Пусть теперь $X = \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ — дизъюнктное объединение топологических пространств. Поскольку стандартный симплекс (любой размерности) линейно связен, образ каждого сингулярного симплекса $f : \Delta_n \to X$ лежит целиком в одном из X_α. Отсюда вытекает, что $C_n(X, K) = \bigoplus_{\alpha\in A} C_n(X_\alpha, K)$ и $H_n(X, K) = \bigoplus_{\alpha\in A} H_n(X_\alpha, K)$. Аналогично доказывается, что $C^n(X, K) = \prod_{\alpha\in A} C^n(X_\alpha, K)$ и $H^n(X, K) = \prod_{\alpha\in A} H^n(X_\alpha, K)$. В частности, $H_0(X, K)$ — свободный K-модуль, порожденный множеством компонент линейной связности пространства X, а $H^0(X; K)$ — K-модуль, состоящий из отображений $\varphi : \{X_\alpha\} \to K$ из множества компонент линейной связности X в K; по-другому можно сказать, что $H^0(X, K)$ — множество отображений из X в K, постоянных на компонентах линейной связности. Если X состоит из конечного количества m компонент линейной связности, то модули $H_0(X, K)$ и $H^0(X, K)$ оба изоморфны K^m и, следовательно, друг другу. Если количество компонент линейной связности бесконечно, то существует гомоморфизм модулей $H_0(X, K) \to H^0(X, K)$, сопоставляющий всякой комбинации $\sum_\alpha u_\alpha X_\alpha$ функцию на X, равную $u_\alpha \in K$ на всех точках компоненты линейной связности X_α, и равную 0 на компонентах, не вошедших в сумму. Как нетрудно видеть, этот гомоморфизм является мономорфизмом (т.е. вложением). Поскольку сумма конечная, образом этого гомоморфизма будут не все функции на X, постоянные на компонентах связности, а только те, которые принимают ненулевое значение лишь на конечном множестве компонент. Следовательно, $H_0(X, K)$ и $H^0(X, K)$ не изоморфны, причем первая изоморфна подмодулю второго.

Пусть теперь $F : X \to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим гомоморфизм модулей $F_{\#,n} : C_n(X, K) \to C_n(Y, K)$, действующий на образующие — сингулярные симплексы — композицией с F: $F_{\#,n}(f) \stackrel{\text{def}}{=} F \circ f$, где $f : \Delta_n \to X$. Определим также двойственный гомоморфизм $F^{\#,n} : C^n(Y, K) \to C^n(X, K)$: $F^{\#,n}(\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(F_{\#,n}(x))$, где $x \in C_n(X, K)$, $\varphi \in C^n(Y, K)$. Непосредственно из определения вытекает, что отображения $F_{\#,n}$ и $F^{\#,n}$ коммутируют с дифференциалами ∂ и d соответственно: $F_{\#,n-1}\partial_{n,X} = \partial_{n,Y} F_{\#,n}$ и $F^{\#,n+1} d_{n,Y} = d_{n,X} F^{\#,n}$. Тем самым наборы гомоморфизмов $F_{\#,n}$ и $F^{\#,n}$ образуют морфизмы комплексов $C.(X, K) \to C.(Y, K)$ и $C^{\cdot}(Y, K) \to C^{\cdot}(X, K)$ соответственно; обозначим их $F_\#$ и $F^\#$. Нетрудно проверить, что $(F \circ G)_\# = F_\# \circ G_\#$ и $(F \circ G)^\# = G^\# \circ F^\#$. Тем самым построен ковариантный функтор из категории топологических пространств в категорию цепных комплексов K-модулей и контравариантный функтор из той же категории в категорию коцепных комплексов.

Поскольку $F_\#$ и $F^\#$ — морфизмы комплексов, естественно определены гомоморфизмы $F_* : H_*(X, K) \to H_n(Y, K)$ и $F^* : H^*(Y, K) \to H^*(X, K)$, причем $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$ и $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$. Тем самым построены ковариантный и контравариантный функторы из категории топологических пространств в категорию градуированных K-модулей (морфизмы в ней — гомоморфизмы модулей, сохраняющие градуировку).

Пример 4. Если $F : X \to Y$ — непрерывное отображение линейно связных топологических пространств, то $F_* : H_0(X, K) \to H_0(Y, K)$ — тождественное отображение $K \to K$. Это вытекает из примера 2: образующей в $H_0(X, K)$ является класс гомологий произвольного сингулярного 0-симплекса $f : \Delta_0 = \mathrm{pt} \to X$; иными словами — отмеченная точка в X. Очевидно, образ сингулярного 0-симплекса при $F_{\#,0}$ — тоже сингулярный 0-симплекс.

Утверждение из гомологической алгебры 1. *Пусть* $P. = \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1,P}} P_n \xrightarrow{\partial_{n,P}} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1,P}} \cdots \xrightarrow{\partial_{1,P}} P_0 \to 0$ *и* $Q.$ *— цепные комплексы K-модулей, а* $\mu : P. \to Q.$ *— морфизм комплексов. Предположим, что существует семейство гомоморфизмов* $\psi_n : P_n \to Q_{n+1}$ *таких, что* $\mu_n = \partial_{n+1,Q}\psi_n + \psi_{n-1}\partial_{n,P}$ *(такое семейство называется цепной гомотопией между μ и нулем). Тогда гомоморфизм* $\mu_* : H_*(P) \to H_*(Q)$ *— нулевой.*

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker}\partial_{n,P}$. Тогда $\mu_n(x) = \partial_{n+1,Q}\psi_n(x) \in \operatorname{Im}\partial_{n+1,Q}$. □

Аналогичное утверждение имеет место для коцепных комплексов.

Теорема 1. *Пусть* $F_t : X \to Y$ *— гомотопия отображений,* $0 \le t \le 1$. *Тогда гомоморфизмы* $(F_0)_* : H_*(X, K) \to H_*(Y, K)$ *и* $(F_1)_* : H_*(X, K) \to H_*(Y, K)$ *совпадают; то же самое верно для* $(F_0)^*$ *и* $(F_1)^*$.

Доказательство. Ввиду предыдущего утверждения достаточно построить семейство гомоморофизмов $\psi_n : C_n(X, K) \to C_{n+1}(Y, K)$ таких, что $\partial_{n+1,Y}\psi_n + \psi_{n-1}\partial_{n,X} = (F_0)_n - (F_1)_n$. Гомотопия F_t это непрерывное отображение $F : X \times [0, 1] \to Y$. Разобьем призму $\Delta_n \times [0, 1] = \{(x_0, \dots, x_n, t) \mid 0 \le x_0, \dots, x_n, t \le 1, x_0 + \dots + x_n = 1\}$ на $n + 1$ симплексов: $\Delta_n \times [0, 1] = Q_0 \cup \dots Q_n$, где $Q_k \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n, t) \in \Delta_n \times [0, 1] \mid x_0 + \dots + x_{k-1} \le t \le x_0 + \dots + x_k\}$. Для каждого Q_k зафиксируем его отождествление $v_{n+1,k} : \Delta_{n+1} \to Q_k$ со стандартным симплексом размерности $n + 1$, заданное формулами $v_{n+1,k}(y_0, \dots, y_{n+1}) = (x_0, \dots, x_n, t)$, где $x_i = y_{n+i+1-k}$ при $0 \le i \le k - 1$, $x_k = y_0 + y_{n+1}$, $x_i = y_{i-k}$ при $k + 1 \le i \le n$, и $t = y_{n+1-k} + \dots + y_{n+1}$; здесь $k = 0, \dots, n$. Для произвольного сингулярного симплекса $f : \Delta_n \to X$ положим теперь по определению $\psi_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F \circ (f \times \mathrm{Id}) \circ v_{n+1,k} \in C_{n+1}(Y, K)$.

Имеем: $\psi_{n-1}(\partial_{n,X}f)+\partial_{n+1,Y}\psi_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+k}F\circ(f\times\mathrm{Id})\circ(u_{n-1,i}\times\mathrm{Id})\circ v_{n,k}+\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{j+l}F\circ(f\times\mathrm{Id})\circ v_{n+1,l}\circ u_{n,j}$. Отображения $(u_{n-1,i}\times\mathrm{Id})\circ v_{n,k}$ и $v_{n+1,k}\circ u_{n,i+1}$ аффинные и, как нетрудно видеть, переводят вершины симплекса Δ_n в одни и те же точки. Следовательно, эти отображения совпадают. Соответствующие члены входят в сумму с противоположными знаками и, следовательно, сокращаются. Итого остается $\psi_{n-1}(\partial_{n,X}f)+\partial_{n+1,Y}\psi_n(f)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\big(F\circ(f\times\mathrm{Id})\circ v_{n+1,l}\circ u_{n,0}+(-1)^nF\circ(f\times\mathrm{Id})\circ v_{n+1,l}\circ u_{n,n+1}\big)$. Аналогично предыдущему рассуждению убеждаемся, что $v_{n+1,l}\circ u_{n,n+1}=(-1)^{n+1}v_{n+1,l+1}\circ u_{n,0}$, откуда вытекает, что в сумме попарно сокращаются все члены, кроме первого и последнего. Это и дает требуемое равенство. $\square$

Следствие. *Соответствия $X\mapsto H_*(X,K)$ и $X\mapsto H^*(X,K)$ являются, соответственно, ковариантным и контравариантным функтором из гомотопической категории в категорию градуированных K-модулей. В частности, гомологии и когомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Пример 5. Из следствия вытекает, в частности, что если X — стягиваемое пространство, то $H_0(X,K)=K$ и $H_n(X,K)=0$ при $n>0$, и аналогично для когомологий. Также вытекает, что если $f:X\to Y$ — отображение, гомотопное отображению в точку, то $f_*=h_*\circ g_*$, где $g:X\to\mathrm{pt}$ — отображение в точку, а $h_*:\mathrm{pt}\to Y$ — отображение точки; отсюда $f_*=\mathrm{id}$ на H_0 и $f_*=0$ на H_n, $n>0$; для когомологий аналогично.