ЛЕКЦИЯ 3–4

Краткое содержание. Барицентрическое подразделение, последовательность Майера–Виеториса, гомологии сфер.

Барицентрическим подразделением стандартного симплекса называется его разбиение $\Delta_n = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_{n+1}} \Delta_{n,\sigma}$; здесь Σ_{n+1} — группа перестановок чисел $0, 1, \dots, n$ (всего их $(n + 1)!$ штук), а $\Delta_{n,\sigma} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_{\sigma(0)} \le \dots \le x_{\sigma(n)}\}$. Вершины барицентрического подразделения соответствуют непустым подмножествам $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$: в вершине $v[A] = (x_0, \dots, x_n)$, соответствующей A, $x_i = 1/\#A$, если $i \in A$, и $x_i = 0$ для прочих i. Вершины симплекса $\Delta_{n,\sigma}$ это $v[\{\sigma(0)\}]$, $v[\{\sigma(0), \sigma(1)\}]$ и т.д. Для каждого σ зафиксируем аффинное отображение $w_{n,\sigma} : \Delta_n \to \Delta_{n,\sigma}$, переводящее для каждого $i = 0, \dots, n$ вершину $x_i = 1$ симплекса Δ_n в вершину $v[\{\sigma(0), \dots, \sigma(i-1)\}]$ симлекса $\Delta_{n,\sigma}$.

Определим гомоморфизм $\beta_n : C_n(X, K) \to C_n(X, K)$, заданный на произвольном сингулярном симплексе $f : \Delta_n \to X$ равенством $\beta_n(f) = \sum_{\sigma\in\Sigma_{n+1}} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} f \circ w_\sigma$, где $\mathrm{sign}(\sigma)$ — четность перестановки σ.

Лемма 1. *Гомоморфизмы β_n образуют морфизм комплексов: $\beta_{n-1}\partial_n = \partial_n\beta_n$.*

Доказательство леммы. Пусить $u_{n-1,i} : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ — стандартное отображение в i-ю грань, $i = 0, \dots, n$. Тогда

$$\partial\beta(f) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma\in S_{n+1}} (-1)^{i+\mathrm{sign}(\sigma)} f \circ w_{n,\sigma} \circ u_{n-1,i}. \tag{1}$$

Как нетрудно заметить, $w_{n,\sigma} \circ u_{n-1,n}$ отображает Δ_{n-1} в грань симплекса $\Delta_{n,\sigma}$, лежащую на поверхности симплекса Δ_n, и поэтому (сравните знаки!) $\sum_{\sigma(n)=k} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} f \circ w_{n,\sigma} \circ u_{n-1,n} = \beta_{n-1}((-1)^{n-k} f \circ u_{n-1,k})$. Суммируя по k, получаем $\sum_{\sigma\in S_{n+1}} (-1)^{n+\mathrm{sign}(\sigma)} f \circ w_{n,\sigma} \circ u_{n-1,n} = \beta_{n-1}(\partial f)$.

Остальные слагаемые в сумме (1) соответствуют внутренним граням (лежащим внутри Δ_n). Если $\tau = \sigma(k, k+1)$ ($k < n!$), то вершины симплексов $\Delta_{n,\sigma}$ и $\Delta_{n,\tau}$ совпадают, за исключением k-й вершины, которая равна $v[\{\sigma(0), \dots, \sigma(k-1), \sigma(k)\}]$ в первом симплексе и $v[\{\tau(0), \dots, \tau(k-1), \tau(k)\}] = v[\{\sigma(0), \dots, \sigma(k-1), \sigma(k+1)\}]$ во втором. Следовательно, $w_{n,\sigma} \circ u_{n-1,k} = w_{n,\tau} \circ u_{n-1,k}$. Но с другой стороны, перестановки σ и τ имеют противоположную четность, так что соответствующие члены в (1) сокращаются. Тем самым сумма членов с $i \ne n$ в (1) равна нулю, и лемма доказана. □

Лемма 2. *Существует цепная гомотопия ψ, соединяющая β с тождественным отображением (т.е. $\beta_n(x) - x = \partial_{n+1}\psi_n(x) - \psi_{n-1}(\partial_n x)$ для произвольного $x \in C_n(X, K)$) и такая, что если $\psi_n(f) \overset{def}{=} \sum_i k_i g_i$, то для всякого i имеет место включение $g_i(\Delta_{n+1}) \subset f(\Delta_n)$.*

Доказательство. Для доказательства построим симплициальное разбиение Ξ призмы $\Delta_n \times [0, 1]$ такое, что $\Delta_n \times \{0\}$ является гранью одного из симплексов (не подразбивается), а на симплексе $\Delta_n \times \{1\}$ возникает барицентрическое подразделение. А именно, симплексы разбиения Ξ нумеруются последовательностями подмножеств $A = (\{0, \dots, n\} = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_k = \{i_1, \dots, i_{n+1-k}\})$, где k — любое число от 0 до n, и $\#A_i = n+1-i$ для всех i. Вершинами симплекса Ξ_A, соответствующего такой последовательности, являются вершины $v[A_0], \dots, v[A_k]$ барицентрического подразделения грани $\Delta_n \times \{1\}$, а также вершины с номерами $i_1, \dots, i_{n+1-k}$ грани $\Delta_n \times \{0\}$. Упорядочим эти вершины так, чтобы вначале шли вершины $i_1 < \dots < i_{n+1-k}$, а затем $v[A_k], v[A_{k-1}], \dots, v[A_n]$, и пусть $\xi_A : \Delta_{n+1} \to \Xi_A$ — аффинное отображение, переводящее i-ю вершину симплекса Δ_{n+1} ($i = 0, \dots, n+1$) в i-ю вершину $\eta_{i,A}$ симплекса Ξ_A (нумерация вершин — в порядке, указанном выше).

Заметим теперь, что $A_0 = \{0, \dots, n\}$ для всех последовательностей A и, следовательно, вершина $\eta_{n+1,A}$ для всех симплексов Ξ_A одинакова — это центр тяжести $(1/(n+1), \dots, 1/(n+1); 1)$ грани $\Delta_n \times \{1\}$ призмы. Пусть $A_n = A_{n+1} \setminus \{m\}$; тогда грань Ξ_A, противолежащая вершине $\eta_{n+1,A}$, лежит в $\Gamma_m \times [0, 1]$, где Γ_m — m-я грань симплекса Δ_n. Исключением является случай, когда $k = 0$ (и тем самым A_n не существует) — тогда соответствующая грань есть нижнее основание $\Delta_n \times \{0\}$ призмы.

Определим теперь гомоморфизм $\psi_n : C_n(X, K) \to C_{n+1}(X, K)$ индукцией по n. Если $n = 0$, и f — сингулярный 0-симплекс, отображающий Δ_0 (точку) в $a \in X$, то $\psi_0(f)$ — сингулярный 1-симплекс, переводящий все точки Δ_1 (отрезка) в a. В общем случае пусть $F : \Delta_n \times [0, 1] \to X$ — композиция сингулярного симплекса $f : \Delta_n \to X$ с проекцией призмы на нижнее основание (т.е. $F(x, t) = f(x)$, $x \in \Delta_n$, $t \in [0, 1]$). Тогда $\psi_n(f) = \sum_A \varepsilon(n, A)(F \circ \xi_A$, где знаки $\varepsilon(n, A) = \pm 1$ определены ниже.

Знаки определяются по индукции: если $k < n$ и $A_n = A_{n+1} \setminus \{m\}$, то знак симплекса Ξ_A такой же, как у его грани, лежашей на боковой поверхности призмы (т.е. в $\Gamma_m \times [0,1]$), умножить на $(-1)^m$: $\varepsilon(n,A) = (-1)^m \varepsilon(n-1,A')$, где последовательность A' получена из A вычеркиванием последнего члена (и перенумерацией чисел $0,\ldots,n$ с пропуском числа m) — знак $\varepsilon(n-1,A')$ уже определен по предположению индукции. Если $k = n$ (т.е. $A = (0,\ldots,n,\{0,\ldots,n\}$, так что грань, противолежащая $\eta_{n+1,A}$ — нижнее основание призмы), то $\varepsilon(n,A) = (-1)^{n+1}$.

Теперь имеем

$$\partial\psi_n(f) = \sum_A \sum_{i=0}^{n} \varepsilon(n,A)(-1)^i f \circ \xi_A \circ u_{n+1,i}. \tag{2}$$

Как нетрудно проверить, если $k = n$ (т.е. только одна вершина, $\eta_{1,A}$, симплекса Ξ_A лежит на верхней грани призмы), то $F \circ \xi_A \circ u_{n+1,0} = f \circ w_{n,\sigma}$ и $\varepsilon(n,A) = -(-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}$, где σ — перестановка, для которой $A_n = \{\sigma(0)\}$, $A_{n-1} = \{\sigma(0),\sigma(1)\}$, и т.д. Отсюда вытекает, что сумма членов (2), у которых последовательность A содержит n членов и $i = 0$, равна $\beta_n(f)$. Также нетрудно проверить, что если $k = 1$ (т.е. последовательность содержит единственный член A_0), то $F \circ \xi_A \circ u_{n+1,n} = -f$ (т.е. минус ограничение F на нижнее основание призмы).

Поскольку $\eta_{n+1,A}$ для всякого A — центр тяжести верхней грани призмы, при $k > 0$ образ отображения $\xi_A \circ u_{n+1,n}$ лежит на боковой поверхности. Если $k = n$, то он является симплексом размерности n. Индуктивное правило для определения знаков гарантирует, что сумма всех членов в (**??**), в которых $k = n$ и $i = n$, равна $-\psi_{n-1}(\partial f)$.

Для завершения доказательства леммы нужно теперь проверить, что сумма всех членов с $i < n$ или $k < n$ в (**??**) равна нулю. Во всех этих случаях одной из вершин (последней по номеру) n-мерного симплекса $\xi_A \circ u_{n+1,i}$ является центр тяжести Q нижнего основания. Рассматривая $(n-1)$-мерные грани этих симплексов, противолежащие Q, мы получим сумму со знаками ограничений f на симплексы симплициального разбиения $\Gamma_m \times [0,1]$, $m = 0,\ldots,n$ (боковые грани призмы $\Delta_n \times [0,1]$, они же призмы с основаниями — гранями Δ_n), которая равна нулю по предположению индукции. Проверка соответствия знаков предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Следствие 1. *Морфизм β действует тривиально на гомологиях: $(\beta_n)_* x = x$ для всякого $x \in H_n(X,K)$.*

Пусть $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты. Обозначим $C_n^{A,B}(X,K)$ свободный K-модуль, порожденный сингулярными сиплексами $f : \Delta_n \to X$ такими, что $f(\Delta_n) \subset A$ или $f(\Delta_n) \subset B$ (для каждого f по-своему). Очевидно, $\partial_n(C_n^{A,B}(X,K)) \subset C_{n-1}^{A,B}(X,K)$, так что модули $C_n^{A,B}(X,K)$ образуют цепной комплекс.

Теорема 1. *Естественные включения $\iota_n : C_n^{A,B}(X,K) \hookrightarrow C_n(X,K)$ образуют морфизм комплексов и порождают изоморфизм гомологий.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть теперь $x \in C_n(X,K)$, $\partial x = 0$. Согласно лемме 1, при любом N имеем $\partial \beta_*^N x = \beta^N \partial x = 0$ и существует y такое, что $x - \beta^N x = \partial y$, так что x и $\beta^N x$ представляют один и тот же класс гомологий в $C(X,K)$.

Лемма 3. *$\beta^N x \in C_n^{A,B}(X,K)$ при достаточно большом N.*

Доказательство леммы 3. x — конечная сумма с коэффициентами сингулярных симплексов, поэтом достаточно доказать утверждение леммы в случае, когда $x = f$ — сингулярный симплекс.

Назовем сингулярные симплексы (всего $(n+1)!$ штук), входящие в цепь $\beta_n(f)$, потомками сингулярного симплекса f. Потомки потомков входят в цепь $\beta^2(f)$, и т.д. Тем самым получается бесконечное дерево T_n, в котором каждая вершина, кроме корня, имеет степень $(n+1)!+1$. Выберем в нем те вершины g, для которых $g(\Delta_n)$ не лежит ни в A, ни в B; нам нужно доказать, что множество выбранных вершин конечно. Если вершина не выбрана, то все ее потомки, очевидно, также не выбраны, так что множество выбранных вершин (и соединяющих их ребер) — поддерево S дерева T_n.

Предположим, что S бесконечно. Тогда имеет место

Лемма 4. *Бесконечное дерево, валентности вершин которого конечны, имеет по крайней мере одну бесконечную цепочку вершин $a_0, a_1, \ldots$, в которой каждая вершина — непосредственный потомок предыдущей (мы предполагаем, что в дереве выбран корень, так что понятие потомка вершины определено).*

Доказательство. Поскольку дерево бесконечно, корень его (обозначим его a_0) имеет бесконечное количество потомков. Тем самым у него есть непосредственные потомки, причем среди них есть хотя бы один (обозначим его a_1), у которого есть бесконечное количество потомков. У него есть непосредственные потомки, хотя бы один из которых (a_2) обладает тем же свойством, и т.д. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — искомая цепочка. □

Тем самым имеется бесконечный набор симплексов $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, такой что D_k принадлежит k-кратному барицентрическому подразделению исходного симплекса Δ_n, и $f(D_k)$ не содержится ни в A, ни в B.

Лемма 5. *Пусть v_1, v_2 — вершины барицентрического подразделения симплекса Δ_n. Тогда ребро, соединяющее эти вершины, можно продлить так, что его длина возрастет по крайней мере в $1 + 1/n$ раза, но отрезок по-прежнему будет лежать в Δ_n.*

Доказательство. Пусть $v_1 = v[C_1]$, $v_2 = v[C_2]$, где $C_1 \subset C_2 \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$. Обозначим $p = \#C_1$, $q = \#C_2$. Тогда произвольная точка прямой, проходящей через C_1 и C_2, имеет координаты $tv_1 + (1-t)v_2$; при $0 \le t \le 1$ эта точка лежит на ребре.

Если $i \in C_1 \subset C_2$, то i-я координата точки $tv_1 + (1-t)v_2$ равна $t/p + (1-t)/q$; если $i \in C_2 \setminus C_1$, то $(1-t)/q$, иначе 0. Точка лежит в Δ_n, если все ее координаты лежат между нулем и единицей. Для этого по крайней мере достаточно, чтобы $t \le p/(p-q) = 1 + 1/(p-q)$ (проверьте!). Но $p - q \le n$, так что если $0 \le t \le 1 + 1/n$, то точка лежит внутри Δ_n. □

Следствие 2. *Диаметр любого симплекса барицентрического подразделения произвольного n-мерного симплекса D меньше диаметра самого симплекса D по крайей мере в $(n+1)/n$ раз.*

Доказательство. Диаметр симплекса равен длине его наибольшего ребра. □

Продолжим доказательство леммы 3. Поскольку симплекс — компакт, симплексы $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ имеют непустое пересечение. Согласно следствию 2, диаметр симплекса D_k не превосходит $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ и стремится к нулю, когда $k \to \infty$. Следовательно, пересечение — единственная точка c. Каждый симплекс D_k содержит точку a_k такую, что $f(a_k) \in X \setminus A$ и точку b_k такую, что $f(b_k) \in X \setminus B$; при этом $a_k, b_k \to c$ при $k \to \infty$. Множества $X \setminus A$ и $X \setminus B$ замкнуты, откуда вытекает, что $f(c) \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) = \varnothing$ — противоречие. Лемма 3 доказана. □

(продолжение доказательства теоремы 1) Тем самым каждый класс гомологий имеет представителя в $C_n^{A,B}(X,K)$, то есть гомоморфизм $\iota_* : H_*(C^{A,B}(X,K)) \to H_*(C(X,K))$ — эпиморфизм.

Докажем, что это мономорфизм. Пусть $[x] \in \operatorname{Ker} \iota_*$, т.е. $x \in C_n^{A,B}(X,K)$ — граница в $C_n(X,K)$: $x = \partial y$, где $y \in C_{n+1}(X,K)$. Согласно лемме 1, $\partial y = \partial\beta(y) + \partial\psi\partial y = \partial\beta(y) + \partial\psi x = \partial y_1$, где $y_1 = \beta y + \psi x$; второе слагаемое лежит в $C_{n+1}^{A,B}(X,K)$. Повторяя эту процедуру несколько раз, получим $\partial y = \partial\beta^N y + \omega_N$ для произвольного N и некоторого $\omega_N \in C_{n+1}^{A,B}(X,K)$. Согласно лемме 3, $\beta^N y \in C_{n+1}^{A,B}(X,K)$ при достаточно большом N. Следовательно, x — граница и в $C_{n+1}^{A,B}(X,K)$, и $\operatorname{Ker} \iota_*|_{H_*(C^{A,B}(X,K))} = 0$ — ι_* является мономорфизмом.

Теорема доказана. □

Предложение 1. *Пусть имеется короткая точная последовательность комплексов $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{p} C \to 0$. Тогда отображения ι_* и p_* включаются в точную последовательность гомологий $\dots \to H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(B) \xrightarrow{p_*} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \dots \xrightarrow{p_*} H_0(C) \to 0$.*

Доказательство. Конструкция гомоморфизма δ_n: пусть $x \in H_n(C)$. Возьмем произвольный представитель $\xi \in C_n$ этого класса гомологий, $\partial_{C,n}\xi = 0$. Поскольку последовательность точная, $p_n : B_n \to C_n$ — сюръекция, так что существует $\eta \in B_n$ такой, что $p_n\eta = \xi$. Тогда $p_{n-1}(\partial_{B,n}\eta) = \partial_{C,n}\xi = 0$ в силу того, что p — морфизм комплексов. Поскольку последовательность комплексов точная, существует (и единствен) элемент $\alpha \in A_{n-1}$ такой, что $\iota_{n-1}\alpha = \partial_{B,n}\eta$. Поскольку ι — морфизм комплексов, имеем $\iota_{n-2}\partial_{A,n-1}\alpha = \partial_{B,n-1}\partial_{B,n}\eta = 0$. Возьмем класс в $H_{n-1}(A)$, представляемый элементом α, в качестве $\delta_n(x)$.

Процесс построения $\delta_n(x)$ неоднозначен в двух местах: выбор представителя ξ класса x и выбор прообраза η элемента ξ. Пусть $\xi' = \xi + \partial_{C,n+1}\varrho$; тогда существует $\lambda \in B_{n+1}$ такой, что $p_{n+1}\lambda = \varrho$ и, следовательно, $p_n(\eta + \partial_{B,n+1}\lambda) = \xi'$. Поскольку $\partial_{B,n}(\eta + \partial_{B,n+1}\lambda) = \partial_{B,n}\eta$, дальнейший процесс не меняется, и $\delta_n(x)$ также остается неизменным. Пусть $\eta' \in B_n$, таков, что $p_n\eta' = \xi$. Тогда $p_n(\eta' - \eta) = 0$ и, следовательно, $\eta' = \eta + \iota_n(\mu)$ для некоторого $\mu \in A_n$. Отсюда вытекает, что $\partial_{B,n}\eta' = \partial_{B,n}\eta + \iota_{n-1}\partial_{A,n}\mu = \iota_{n-1}(\alpha + \partial_{A,n}\mu)$, так что класс гомологий $\delta_n(x)$ определен корректно.

Проверка точности полученной последовательности — упражнение. □

Пусть $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты. Рассмотрим последовательность комплексов $0 \to C(A \cap B, K) \xrightarrow{(\iota_A, -\iota_B)} C(A,K) \oplus C(B,K) \xrightarrow{p} C^{A,B}(X,K) \to 0$; здесь ι_A, ι_B — тавтологические вложения $A \cap B$ в A и B соответственно, а $p(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y$. Возникающая, согласно утверждению 1 и теореме 1, точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(A \cap B, K) \to H_n(A,K) \oplus H_n(B,K) \to H_n(X,K) \to H_{n-1}(A \cap B, K) \to \dots$ называется последовательностью Майера–Виеториса.

Пример 1. Пусть $X = S^1$, $a, b \in S^1$ — диаметрально противоположные точки, $A = S^1 \setminus \{a\}$, $B = S^1 \setminus \{b\}$. Тогда конечный отрезок последовательности Майера–Виеториса выглядит так: $\dots \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(S^1) \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(S^1) \to 0$. Пространства A, B и S^1 линейно связны, а пространство $A \cap B$ содержит две компоненты. Кроме того, пространства A и B, а также обе компоненты пересечения $A \cap B$. стягиваемы. Тогда из гомотопической инвариантности гомологий вытекает, что отрезок имеет вид

$0 \to H_1(S^1) \to K^2 \xrightarrow{\delta_0} K^2 \to K \to 0$, где $\delta_0(x, y) = (x + y, -x - y)$. В силу точности последовательности получаем, что $H_1(S^1) = K$; образующая $H_1(S^1)$ в модуле $C_1^{A,B}(S^1)$ представлена суммой $g_1 + g_2$, где $g_1 : \Delta_1 \to A$, $g_2 = \Delta_1 \to B$ — кривые, для которых $g_1((1, 0)) = g_2((0, 1))$ и $g_1((0, 1)) = g_2((1, 0))$. В модуле $C_1(S^1)$ в качестве представителя образующей можно выбрать сингулярный симплекс $g : \Delta_1 \to S^1$, представляющий собой замкнутую кривую индекса 1.

Остальная часть последовательности Майера–Виеториса разбивается на отрезки вида $\cdots \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(S^1) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \dots$, $n \geq 2$. В силу гомотопической инвариантности гомологий два крайних члена здесь — нули, откуда $H_n(S^1) = 0$ при $n \geq 2$.

Пример 2. Пусть теперь $X = S^n$ с $n \geq 2$, A и B — как в примере 1. Тогда A и B стягиваемы, а $A \cap B$ гомотопически эквивалентно S^{n-1} (ретрагируется на экватор сферы). Отрезок последовательности Майера–Виеториса, содержащий H_k, $k \geq 2$, выглядит так: $\cdots \to H_k(A) \oplus H_k(B) \to H_k(S^n) \to H_{k-1}(A \cap B) \to H_{k-1}(A) \oplus H_{k-1}(B) \to \dots$. В силу гомотопической инвариантности гомологий получаем, что крайние члены равны нулю, откуда $H_k(S^n)$ изоморфна $H_{k-1}(S^{n-1})$ при $k \geq 2$. По индукции получаем, что $H_n(S^n) = H_0(S^n) = K$, а остальные гомологии S^n нулевые. Также по индукции заключаем, что образующей $H_n(S^n)$ является класс гомологий, представленный суммой $g_1 + g_2$, где $g_1, g_2 : \Delta_n \to S^n$ — проекция стандартного симплекса, вписанного в сферу S^{n-1}, соответственно на верхнее и на нижнее полушарие сферы S^n, в котором описанная сфера S^{n-1} является экватором.