ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Относительные гомологии, точные последовательности пары и тройки. Гомологии клеточных пространств.

Пусть $Y \subset X$ — топологические пространства, и $\iota : Y \to X$ — тавтологическое вложение ($\iota(a) = a$, но в правой части $a \in Y$ рассматривается как точка $a \in X$). В этом случае гомоморфизм $\iota_\# : C_n(Y, K) \to C_n(X, K)$ — очевидно, инъекция. Обозначим $C_n(X, Y, K) \stackrel{\text{def}}{=} C_n(X, K)/\iota_\#(C_n(Y, K))$. Поскольку $\iota_\#$ — морфизм комплексов ($\partial_X \iota_\# = \iota_\# \partial_Y$), определен гомоморфизм $C_n(X, Y, K) \to C_{n-1}(X, Y, K)$, который мы обозначим $\partial_{X,Y}$ и который обладает свойством $\partial_{X,Y}^2 = 0$. Тем самым, $C_n(X, Y, K)$ превращается в комплекс, гомологии которого обозначаются $H_*(X, Y, K)$ и называются относительными гомологиями X по Y. Относительные n-циклы в $C_n(X, Y, K)$ представляются n-цепями $x \in C_n(X, K)$, для которых $\partial x \in C_{n-1}(Y, K)$ (т.е. граница которых лежит в Y).

Пусть $p : C_n(X, K) \to C_n(X, Y, K)$ — проекция на фактор; нетрудно проверить, что это тоже морфизм комплексов, и что последовательность комплексов $0 \to C_\bullet(Y) \xrightarrow{\iota_\#} C_\bullet(X) \xrightarrow{p} C_\bullet(X, Y) \to 0$ — точная. По теореме Бокштейна, возникает точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Y) \to \dots$, называемая точной последовательностью пары. Гомоморфизм Бокштейна δ в этой последовательности сопоставляет относительному n-циклу, представленному n-цепью $x \in C_n(X, K)$, ее границу $\partial x \in C_{n-1}(Y, K)$.

Пример 1. Пусть $Y \subset X$ состоит из одной точки; относительные гомологии $H_n(X, Y)$ называют в этом случае приведенными гомологиями X и обозначают $\tilde{H}_n(X)$. Из точной последовательности пары при $n \geq 2$ получаем $\dots \to 0 = H_n(\mathrm{pt}) \to H_n(X) \to \tilde{H}_n(X) \to H_{n-1}(\mathrm{pt}) = 0$, так что $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$. Хвост точной последовательности пары выглядит так: $0 = H_1(\mathrm{pt}) \to H_1(X) \to \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathrm{pt}) = K \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \to \tilde{H}_0(X) \to 0$. Как было доказано в примере 4 лекции 1, отображение ι_* является вложением $K \to H_0(X) = K^{\pi_0(X)}$, переводящим 1 в образующую, соответствующую компоненте линейной связности, содержащей точку Y. Из точности последовательности теперь вытекает, что $\delta = 0$, откуда $\tilde{H}_1(X) = H_1(X)$ и $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus K$; в частности $\tilde{H}_0(X) = 0$ для линейно связного X.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, где $n > 1$ (случай $n = 1$ разберите самостоятельно), $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, так что X стягиваемо, а Y гомотопически эквивалентно S^{n-1}. Тогда фрагмент точной последовательности пары (X, Y) в градуировке $m \neq 0, n$ выглядит так: $0 = H_m(\mathbb{R}^n) \to H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, откуда $H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$. При $m = n$ имеем $0 = H_n(\mathbb{R}^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = K \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$, откуда $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = K$, а гомоморфизм Бокштейна $\delta : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — изоморфизм. Поскольку $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ретрагируется на сферу S^{n-1} с центром в нуле, в качестве образующей в $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = K$ можно выбрать стандартную образующую $u_n \in H_{n-1}(S^{n-1})$ — сумму $(n-1)$-мерных симплексов произвольной триангуляции T сферы. Отсюда образующая $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ должна представляться n-цепью $x \in C_n(\mathbb{R}^n)$, граница которой равна u_n — например, сумму n-мерных симплексов, основания которых это симплексы триангуляции T, а $(n+1)$-я вершина — начало координат.

Абсолютные гомологии тоже можно рассматривать как относительные: $H_*(X) = H_*(X, \varnothing)$.

Относительные гомологии и когомологии обладают функториальными свойствами, аналогичными свойствам обычных (абсолютных) гомологий. А именно, пусть $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$. Назовем отображением пар $(X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ непрерывное отображение $f : X_1 \to X_2$ такое, что $f(Y_1) \subset Y_2$. Гомотопии отображений пар и гомотопическая эквивалентность пар определяются аналогично абсолютному случаю. Тем самым определена гомотопическая категория пар, объекты которой — классы гомотопической эквивалентности пар, а морфизмы — классы гомотопии отображений. Тогда имеет место

Теорема 1. *Относительные гомологии определяют функтор из гомотопической категории пар в категорию градуированных K-модулей.*

В частности, для каждого непрерывного отображения пар $f : (X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ определен гомоморфизм модулей $f_* : H_n(X_1, Y_1, K) \to H_n(X_2, Y_2, K)$; для гомотопных отображений этот гомоморфизм одинаков. Гомологии гомотопически эквивалентных пар совпадают.

Доказательство теоремы 1 такое же, как у соответствующей теоремы для абсолютных гомологий.

Пусть теперь $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты, и пусть $A' = A \cap Y$, $B' = B \cap Y$. (Тем самым A' и B' открыты в топологии $Y \subset X$, но не обязательно — в топологии X). Тогда определен комплекс $C_\bullet^{A,B}(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} C_\bullet^{A,B}(X)/C_\bullet^{A',B'}(Y)$ и морфизм комплексов $\iota : C_\bullet^{A,B}(X,Y) \to C_\bullet(X,Y)$.

Теорема 2. *Морфизм ι порождает изоморфизм в гомологиях.*

Доказательство такое же, как у соответствующей теоремы про абсолютные гомологии.

Напомним, что *клеточным пространством* называется множество X и набор троек $\{(e_\alpha^{(k)}, \chi_\alpha^{(k)}) \mid k = 0, 1, \dots, \alpha \in I_k\}$, где I_k — произвольное множество индексов, $e_\alpha^{(k)} \subset X$, а $\chi_\alpha^{(k)} : B_k \to X$ — отображение k-мерного замкнутого шара в X. Множества $e_\alpha^{(k)}$ называются клетками, число k — размерностью клетки $e_\alpha^{(k)}$, а отображение $\chi_\alpha^{(k)}$ называется характеристическим отображением клетки $e_\alpha^{(k)}$. При этом требуется, чтобы набор обладал следующими свойствами:

1) Множества $e_\alpha^{(k)}$ попарно не пересекаются и образуют разбиение множества X: $X = \bigsqcup_{k=0}^\infty \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^{(k)}$.
2) Ограничение $\chi_\alpha^{(k)}$ на внутренность $\operatorname{int} B_k$ шара — взаимно однозначное отображение $\operatorname{int} B_k \to e_\alpha^{(k)}$, а образ границы ∂B_k шара лежит в объединении конечного множества клеток $e_\beta^{(l)}$ размерности $l < k$: $\chi_\alpha^{(k)})(\partial B_k) \subset e_{\beta_1}^{(l_1)} \cup \dots e_{\beta_N}^{(l_N)}$; $l_1, \dots, l_N < k$.

Множество индексов I_k может быть конечным, бесконечным (любой мощности) или пустым — не обязательно имеются клетки всех размерностей. Объединение $\operatorname{sk}_n(X) = \bigcup_{k \le n} e_\alpha^{(k)}$ называется n-остовом множества X. Клеточным подпространством X называется подмножество $Y = \bigsqcup_k \bigcup_{\alpha \in J_k} e_\alpha^{(k)} \subset X$ (для некоторого набора подмножеств $J_k \subset I_k$), такое что клетки $e_\alpha^{(k)}$, $\alpha \in J_k$, образуют его клеточное разбиение.

Структура клеточного пространства позволяет ввести в X топологию: множество $A \subset X$ считается замкнутым, если его прообраз $(\chi_\alpha^{(k)})^{-1}(A) \subset B_k$ замкнут при любых k и $\alpha \in I_k$. Нетрудно проверить, что это действительно топология, относительно которой все характеристические отображения непрерывны. Клеточным разбиением топологического пространства Y называется его гомеоморфизм с клеточным пространством.

Клеточные пространства образуют категорию, морфизмами в которой являются клеточные отображения: отображение $f : X_1 \to X_2$ называется клеточным, если $f(\operatorname{sk}_n(X_1) \subset \operatorname{sk}_n(X_2)$ и отображение f непрерывно относительно клеточной топологии в X_1 и X_2. Тем самым имеется функтор из категории клеточных пространств в категорию топологических пространств.

Важным свойством клеточных пространств является следующая

Лемма 1 (лемма Борсука)**.** *Пусть X — клеточное пространство, Y — произвольное топологическое пространство, $Z \subset X$ — клеточное подпространство. Пусть задана гомотопия $\Phi : Z \times [0,1] \to Y$ и отображение $\Psi_0 : X \to Y$ такое, что $\Psi(z) = \Phi(z, 0)$ для любого $z \in Z$. Тогда существует гомотопия $\Psi : X \times [0,1] \to Y$ такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$ при всех $x \in X$ и $\Phi(z,t) = \Psi(z,t)$ для всех $z \in Z$, $t \in [0,1]$.*

Доказательство. Зафиксируем клетку $e_\alpha^{(k)}$ пространства X и предположим, что гомотопия Ψ уже задана на всех клетках подпространства Z и на всех клетках $e_\beta^{(l)}$ пространства X размерности $l < k$. Тем самым $\Psi(x,t)$ определена при $x \in \partial e_\alpha^{(k)}$ и при всех x и $t = 0$. Отождествляя $e_\alpha^{(k)}$ с $\operatorname{int} B_k$, получим задачу продолжения отображения Ψ на $B_k \times [0,1]$ при условии, что оно задано на $C_k \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_k \times [0,1] \cup B_k \times \{0\}$.

Существует непрерывное отображение (ретракция) $f : B_k \times [0,1] \to C_k$ такое, что $f(s) = s$ при всех $s \in C_k \subset B_k$ (например, можно вложить $B_k \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{k+1}$ и взять в качестве f проекцию из точки $(a, 1+\varepsilon)$, где a — центр круга, а $\varepsilon > 0$ произвольно. Отображение $\Psi(b,t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(f(b,t))$ ($f(b,t) \in U_k$, поэтому правая часть определена) является искомым продолжением.

Тем самым существует продолжение гомотопии Ψ в произвольную клетку, если во все клетки меньшей размерности гомотопия уже продолжена. При этом продолжение можно делать одновременно для всех клеток данной размерности. Таким образом получим для каждого n непрерывное отображение $\Psi_n : \operatorname{sk}_n(X) \times [0,1] \to Y$, продолжающее гомотопию Φ и отображение Ψ_0, причем эти продолжения согласованы: $\Psi_n|_{\operatorname{sk}_{n-1}(X) \times [0,1]} = \Psi_{n-1}$. Это дает отображение $\Psi : X \times [0,1] \to Y$, непрерывность которого вытекает из определения клеточной топологии (непрерывность на каждом остове влечет непрерывность на всем пространстве). $\square$

Теорема 3. *Пусть X — клеточное пространство, Y — его клеточное подпространство, X/Y — факторпространство X, в котором Y стянуто в точку a. Тогда отображение проекции $p : (X,Y) \to (X/Y, a)$ порождает изоморфизм гомологий $p_* : H_*(X,Y) \to \tilde{H}_*(X/Y)$.*

Доказательство. Пусть CY — конус над пространством Y. Приклеим его к X, отождествляя нижнее основание с $Y \subset X$; полученное пространство обозначим Z. Пространство Z — клеточное; CY — его клеточное подпространство. CY стягивается в точку v (вершину конуса); отсюда, по лемме 1 получаем, что существует гомотопия $F_t : X \to X$ такая, что $F_t(CY) \subset CY$, $F_0 = \mathrm{id}$ и $F_1(CY) = \{v\}$. Следовательно, пара (Z, CY) гомотопически эквивалентна паре $(X/Y, v)$, откуда $H_*(Z, CY) = \tilde{H}_*(X/Y)$.

Положим $A = Z \setminus X$ и $B = Z \setminus \{v\}$. Очевидно, $C_n^{A,B}(Z, CY) = C_n(B, CY \setminus \{v\})$, откуда в силу теоремы 2 вытекает, что $H_*(Z, CY) = H_*(B, CY \setminus \{v\})$. Пара $(B, CY \setminus \{v\})$ гомотопически эквивалентна (X, Y), откуда $H_*(X, Y) = H_*(B, CY \setminus \{v\}) = H_*(Z, CY) = \tilde{H}_*(X/Y)$. □

Пусть теперь $Z \subset Y \subset X$ — топологические пространства. Тогда имеется точная последовательность комплексов $0 \to C_\cdot(Y, Z) \to C_\cdot(X, Z) \to C_\cdot(X, Y) \to 0$; соответствующая точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y, Z) \to H_n(X, Z) \to H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y, Z) \to \dots$ называется точной последовательностью тройки. Точная последовательность пары — частный случай точной последовательности тройки: $Z = \varnothing$.

Пусть X — клеточное пространство, а $W_n(X, K)$ — свободный K-модуль, порожденный множеством n-мерных клеток. Пусть σ — n-мерная клетка, $\chi_\sigma : D_n \to \overline{\sigma} \subset X$ — характеристическое отображение, и τ — $(n-1)$-мерная клетка, лежащая на границе σ. Обозначим A_τ объединение всех клеток λ размерности $n-1$, кроме τ, а также всех клеток размерности, меньшей $n-1$. Коэффициентом инцидентности $[\sigma : \tau]$ называется степень отображения $S^{n-1} = \partial D_n \xrightarrow{\chi_\sigma} \partial\sigma \xrightarrow{p_\tau} \overline{\tau}/\partial\tau \xrightarrow{\chi_\tau^{-1}} S^{n-1}$, где p_τ — проекция $\partial\sigma \to \partial\sigma/A_\tau$. Определим теперь гомоморфизм модулей $\partial_n : W_n(X) \to W_{n-1}(X)$ условием $\partial_n(\sigma) = \sum_\tau [\sigma : \tau]\tau$ (согласно определению клеточного пространства сумма в правой части конечна).

Теорема 4. *Модули $W_n(X)$ и гомоморфизмы ∂_n образуют комплекс, гомологии которого равны $H_*(X, K)$.*

Прежде чем доказывать теорему, выясним гомологический смысл модулей $W_n(X)$. Согласно определению клеточного пространства фактор $\mathrm{sk}_n(X)/\mathrm{sk}_{n-1}(X)$ — букет n-мерных сфер, взаимно однозначно соответствующих n-мерным клеткам в X. Отсюда вытекает, что $W_n(X)$ естественно изоморфен $H_n(\mathrm{sk}_n(X)/\mathrm{sk}_{n-1}(X)) = H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ (последнее равенство — из теоремы 3).

Гомологический смысл имеет и дифференциал ∂_n:

Лемма 2. *Гомоморфизм* $\partial_n : W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) = W_{n-1}(X)$ *совпадает с гомоморфизмом из точной последовательности тройки* $(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$.

Доказательство. Пусть D_n — n-мерный шар, $S^{n-1} \subset D_n$ — его граница. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 = H_n(D_n) & \to & H_n(D_n, S^{n-1}) & \xrightarrow{p} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & H_{n-1}(D_n) = 0 \\
 & & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \\
 & & H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) & & \\
 & & || & & || & & \\
 & & W_n(X) & & W_{n-1}(X) & &
\end{array},$$

в которой первая строка — фрагмент точной последовательности тройки $(D_n, S^{n-1}, \varnothing)$ (т.е. точной последовательности пары (D_n, S^{n-1})), а вторая — фрагмент точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$. Шар D_n стягиваем, так что $H_n(D_n) = H_{n-1}(D_n) = 0$ в силу гомотопической инвариантности гомологий (мы предполагаем $n \geq 2$; случай $n = 1$ — упражнение, ответ там такой же). Согласно примеру 2 лекции 2, $H_{n-1}(S^{n-1}) = K$, откуда в силу точности последовательности (или по теореме 3) $H_n(D_n, S^{n-1}) = K$ и p — изоморфизм.

По определению характеристического отображения и в силу описания гомологий сферы, приведенного в примере 2 лекции 2, $(\chi_\sigma)_*(1)$ — образующая $a_\sigma \in W_n(X)$, соответствующая клетке σ. В силу коммутативности $\delta(a_\sigma) = (\chi_\sigma)_*(p(1)) = (\chi_\sigma)_*(1)$. Согласно теореме 2 лекции 2, $(\chi_\sigma)_*(1) = \sum_\tau [\sigma : \tau] a_\tau = \partial(a_\sigma)$. □

Доказательство теоремы 4. Пусть $x \in W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$. Это означает, что x — множество относительных циклов, т.е. сингулярных цепей в $\mathrm{sk}_n(X)$, границы которых лежат в $\mathrm{sk}_{n-1}(X)$. Тогда $\partial_n(x) \in W_{n-1}(X)$ — упомянутая граница. Теперь $\partial_{n-1}(\partial_n(x)) = 0$, потому что граница границы равна нулю ($\partial^2 = 0$ в сингулярном комплексе). Тем самым $W_n(X)$ и ∂_n образуют комплекс.

Точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$ содержит фрагмент $W_{n+1}(X) = H_{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_n(X)) \xrightarrow{\delta} H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) \xrightarrow{\alpha} H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_n(X))$. Поскольку $\mathrm{sk}_{n+1}(X)/\mathrm{sk}_n(X)$ — букет $(n+1)$-мерных сфер, последний член равен нулю, и α — эпиморфизм, откуда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) = H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))/\operatorname{Im}\delta$.

Точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$ содержит фрагмент $H_n(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) \xrightarrow{\beta} H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) = W_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) = W_{n-1}(X)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{n-1}(X)/\mathrm{sk}_{n-2}(X)$ — букет $(n-1)$-мерных сфер, первый член равен нулю, и β — мономорфизм. Отсюда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) = \operatorname{Im}\beta/\operatorname{Im}(\beta \circ \delta) = \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}(\beta \circ \delta)$. Из определения точной последовательности тройки нетрудно убедиться, что $\beta \circ \delta = \partial_{n+1}$. Следовательно, n-ые гомологии клеточного комплекса равны $H_n^W(X) = \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1} = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$.

Для всякого $m \le n-2$ точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_m(X), \mathrm{sk}_{m-1}(X))$ содержит фрагмент $H_n(\mathrm{sk}_m(X), \mathrm{sk}_{m-1}(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{m-1}(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_m(X)) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_m(X), \mathrm{sk}_{m-1}(X))$. Поскольку $\mathrm{sk}_m(X)/\mathrm{sk}_{m-1}(X)$ представляет собой букет m-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_m(X)) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{m-1}(X))$ — следовательно, $H_n^W(X) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X), \mathrm{sk}_{n-3}(X)) = \dots = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}(X))$ (поскольку $\mathrm{sk}_{-1}(X) = \varnothing$).

Для всякого $m \ge n+1$ точная последовательность пары $(\mathrm{sk}_{m+1}(X), \mathrm{sk}_m(X))$ содержит фрагмент $H_{n+1}(\mathrm{sk}_{m+1}(X), \mathrm{sk}_m(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_m(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_{m+1}(X)) \to H_n(\mathrm{sk}_{m+1}(X), \mathrm{sk}_m(X))$. Поскольку $\mathrm{sk}_{m+1}(X)/\mathrm{sk}_m(X)$ представляет собой букет $(m+1)$-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\mathrm{sk}_m(X)) = H_n(\mathrm{sk}_{m+1}(X))$, и $H_n^W(X) = H_n(\mathrm{sk}_m(X))$ для всякого $m \ge n+1$. В силу компактности симплекса любой сингулярный симплекс в клеточном пространстве целиком лежит в каком-нибудь остове; отсюда вытекает, что $H_n^W(X) = H_n(X)$. □

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{C}P^n$. Обозначим $e^{(2k)} = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0, z_k \ne 0\}$; здесь $0 \le k \le n$. Подножества $e^{(2k)} \subset \mathbb{C}P^n$ образуют клеточное разбиение: характеристическое отображение $\chi^{(2k)} : D_{2k} = \{(w_0, \dots, w_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mid |w_0|^2 + \dots + |w_k|^2 \le 1\} \to \mathbb{C}P^n$ задано формулой $\chi^{(2k)}(w_0, \dots, w_{k-1}) = [w_0 : \dots : w_{k-1} : \sqrt{1 - (|w_0|^2 + \dots + |w_k|^2)} : 0 : \dots : 0]$ (докажите, что это действительно характеристическое отображение!). Построенное клеточное разбиение содержит одну клетку каждой четной размерности $0, 2, \dots, 2n$. Тем самым клеточный комплекс выглядит как $K \to 0 \to K \to \dots \to 0 \to K$; очевидно, все стрелки нулевые, откуда $H_{2s}(X, K) = H^{2s}(X, K) = K$ при $0 \le s \le n$, а остальные гомологии и когомологии равны нулю. В частности, отсюда вытекает, что комплексные проективные пространства разной размерности гомотопически не эквивалентны.

Пример 4. $X = \mathbb{R}P^n$ с однородными координатами $[x_0 : \dots : x_n]$. Положим $e^{(k)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_k \ne 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Характеристическое отображение $\chi^{(k)} : D_k \to \mathbb{R}P^n$, где D_k — k-мерный шар радиуса 1 с центром в нуле, определяется так же, как в примере 3. Отображение $\chi^{(k)}$ взаимно однозначно на внутренности шара; точка границы $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \partial e^{(k)} = \overline{e^{(k)}} \setminus e^{(k)} = e^{(0)} \cup \dots \cup e^{(k-1)}$ имеет два прообраза, $y = \pm(x_0, \dots, x_{k-1})/\sqrt{x_0^2 + \dots + x_{k-1}^2}$. На границе сферы $\chi^{(k)}$ четное: $\chi^{(k)}(-y) = \chi^{(k)}(y)$ при $y_1^2 + \dots + y_k^2 = 1$. Поэтому знаки двух прообразов отличаются умножением на знак определителя производной “антиподального” отображения $y \to -y$ сферы S^{k-1}. Нетрудно проверить, что этот знак равен $(-1)^k$, так что $[e^{(k)} : e^{(k-1)}] = 1 + (-1)^k$. Тем самым клеточный комплекс выглядит так: $K \xrightarrow{1+(-1)^n} \dots \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\times 2} K \xrightarrow{0} K$.

Если $2 = 0$ в кольце K, то все дифференциалы нулевые и $H_s(\mathbb{R}P^n; K) = K$ при $0 \le s \le n$. Если $2 \ne 0$, то $H_0(\mathbb{R}P^n; K) = K$, $H_s(\mathbb{R}P^n; K) = K/2K$ при s нечетном и меньшем n; $H_s(\mathbb{R}P^n; K) = \mathrm{Ker}(\times 2)$ при s четном от 2 до $n-1$ (ядро оператора $K \to K$, умножающего каждый элемент на 2); $H_n(\mathbb{R}P^n; K) = K$ при n нечетном и $H_n(\mathbb{R}P^n; K) = 0$ при n четном. Отсюда, в частности, вытекает, что вещественные проективные пространства разной размерности гомотопически не эквивалентны.