ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Гомологии клеточных пространств.

Пусть $Z \subset Y \subset X$ — топологические пространства. Обозначим $\iota_1 : Y \to X$ и $\iota_2 : Z \to Y$ тавтологические вложения; тогда имеется точная последовательность комплексов $0 \to C_\bullet(Y,Z) \xrightarrow{(\iota_1)_*} C_\bullet(X,Z) \xrightarrow{\iota_2^*} C_\bullet(X,Y) \to 0$; соответствующая (по теореме Бокштейна) точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y,Z) \to H_n(X,Z) \to H_n(X,Y) \to H_{n-1}(Y,Z) \to \dots$ называется точной последовательностью тройки. Точная последовательность пары — частный случай точной последовательности тройки: $Z = \varnothing$.

Пусть X — клеточное пространство, а $W_n(X,K)$ — свободный K-модуль, порожденный множеством n-мерных клеток. Напомним, что символом $\mathrm{sk}_k(X) \subset X$ обозначается k-й остов X, т.е. объединение всех клеток размерности k и меньше; для экономии места будем писать просто sk_k. Пусть σ — n-мерная клетка, $\chi_\sigma : D_n \to \overline{\sigma} \subset X$ — ее характеристическое отображение, и $\tau \subset \partial\sigma$ — $(n-1)$-мерная клетка (символом ∂ здесь обозначена граница в геометрическом смысле: $\partial\sigma = \overline{\sigma} \setminus \sigma$). Обозначим $A_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sk}_{n-1} \setminus \tau$ (т.е. объединение всех клеток λ размерности $n-1$, кроме τ, а также всех клеток размерности, меньшей $n-1$). Коэффициентом инцидентности $[\sigma : \tau]$ называется степень отображения $S^{n-1} = \partial D_n \xrightarrow{\chi_\sigma} \partial\sigma \xrightarrow{p_\tau} \overline{\tau}/A_\tau \xrightarrow{\chi_\tau^{-1}} S^{n-1}$, где p_τ — проекция $\partial\sigma \to \partial\sigma/A_\tau$. Определим теперь гомоморфизм модулей $\partial_n : W_n(X) \to W_{n-1}(X)$ условием $\partial_n(\sigma) = \sum_\tau [\sigma : \tau]\tau$ (согласно определению клеточного пространства сумма в правой части конечна).

Теорема 1. *Модули $W_n(X)$ и гомоморфизмы ∂_n образуют комплекс, гомологии которого равны $H_*(X,K)$.*

Прежде чем доказывать теорему, выясним гомологический смысл модулей $W_n(X)$. Согласно определению клеточного пространства фактор $\mathrm{sk}_n / \mathrm{sk}_{n-1}$ — букет n-мерных сфер, взаимно однозначно соответствующих n-мерным клеткам в X. Отсюда вытекает, что $W_n(X)$ естественно изоморфен $H_n(\mathrm{sk}_n / \mathrm{sk}_{n-1}) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1})$ (последнее равенство — из теоремы Борсука).

Гомологический смысл имеет и дифференциал ∂_n:

Лемма 1. *Гомоморфизм $\partial_n : W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = W_{n-1}(X)$ совпадает с гомоморфизмом из точной последовательности тройки* $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$.

Доказательство. Пусть D_n — n-мерный шар, $S^{n-1} \subset D_n$ — его граница. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & & K & & K & & 0 \\
|| & & || & & || & & || \\
H_n(D_n) & \to & H_n(D_n, S^{n-1}) & \xrightarrow{p} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & H_{n-1}(D_n) \\
 & & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \\
 & & H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1} / \mathrm{sk}_{n-2}) & & \\
 & & || & & || & & \\
 & & W_n(X) & & W_{n-1}(X) & &
\end{array},
$$

в которой первая строка — фрагмент точной последовательности пары (D_n, S^{n-1}), а вторая — фрагмент точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$. Шар D_n стягиваем, так что $H_n(D_n) = H_{n-1}(D_n) = 0$ в силу гомотопической инвариантности гомологий (мы предполагаем $n \ge 2$; случай $n = 1$ — упражнение, ответ там такой же). Согласно примеру 2 лекции 3–4, $H_{n-1}(S^{n-1}) = K$, откуда в силу точности последовательности (или по теореме Борсука) $H_n(D_n, S^{n-1}) = K$ и p — изоморфизм.

По определению характеристического отображения и в силу описания гомологий сферы, приведенного в примере 2 лекции 3–4, $(\chi_\sigma)_*(1)$ — образующая $a_\sigma \in W_n(X)$, соответствующая клетке σ. В силу коммутативности $\delta(a_\sigma) = (\chi_\sigma)_*(p(1)) = (\chi_\sigma)_*(1)$. Согласно теореме 2 лекции 5, $(\chi_\sigma)_*(1) = \sum_\tau [\sigma : \tau] a_\tau = \partial(a_\sigma)$. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $x \in W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1})$. Это означает, что x — множество относительных циклов, т.е. сингулярных цепей в sk_n, границы которых лежат в sk_{n-1}. Из леммы 1 следует, что $\partial_n x \in W_{n-1}(X)$ — упомянутая граница. Теперь $\partial_{n-1}(\partial_n(x)) = 0$, потому что граница границы равна нулю ($\partial^2 = 0$ в сингулярном комплексе). Тем самым $W_n(X)$ и ∂_n образуют комплекс.

Точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2})$ содержит фрагмент $W_{n+1}(X) = H_{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n) \xrightarrow{\delta} H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) \xrightarrow{\alpha} H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2}) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{n+1} / \mathrm{sk}_n$ — букет $(n+1)$-мерных сфер, последний член равен нулю, и α — эпиморфизм, откуда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) / \operatorname{Im}\delta$.

Точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$ содержит фрагмент $H_n(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) \to H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) \xrightarrow{\beta} H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}) = W_n(X) \xrightarrow{\partial_n^W} H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = W_{n-1}(X)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{n-1} / \mathrm{sk}_{n-2}$ — букет $(n-1)$-мерных сфер, первый член равен нулю, и β — мономорфизм.

Из определения гомоморфизмов в точной последовательности тройки нетрудно заметить, что $\beta \circ \delta : W_{n+1}(X) \to W_n(X)$ совпадает с ∂_{n+1}^W (т.е., согласно лемме 1, с гомоморфизмом в точной последовательности тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1})$). Отсюда получается, что n-ые гомологии клеточного комплекса равны $H_n^W(X) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Im} \beta / \operatorname{Im}(\beta \circ \delta)$ (в силу точности последовательности тройки $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})$). Поскольку β — мономорфизм, имеем $\operatorname{Im} \beta = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2})$, откуда $H_n^W(X) = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) / \operatorname{Im} \delta = H_n(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-2}) / \operatorname{Ker} \alpha$ (в силу точности последовательности тройки $(\mathrm{sk}_n, \mathrm{sk}_{n-1}, \mathrm{sk}_{n-2})) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2})$ (поскольку α — эпиморфизм).

Для всякого $m \le n-2$ точная последовательность тройки $(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_m, \mathrm{sk}_{m-1})$ содержит фрагмент $H_n(\mathrm{sk}_m, \mathrm{sk}_{m-1}) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{m-1}) \to H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_m) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_m, \mathrm{sk}_{m-1})$. Поскольку $\mathrm{sk}_m / \mathrm{sk}_{m-1}$ представляет собой букет m-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_m) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{m-1})$ — следовательно, $H_n^W(X) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-2}) = H_n(\mathrm{sk}_{n+1}, \mathrm{sk}_{n-3}) = \dots = H_n(\mathrm{sk}_{n+1})$ (поскольку $\mathrm{sk}_{-1}(X) = \varnothing$).

Для всякого $m \ge n+1$ точная последовательность пары $(\mathrm{sk}_{m+1}, \mathrm{sk}_m)$ содержит фрагмент $H_{n+1}(\mathrm{sk}_{m+1}, \mathrm{sk}_m) \to H_n(\mathrm{sk}_m) \to H_n(\mathrm{sk}_{m+1}) \to H_n(\mathrm{sk}_{m+1}, \mathrm{sk}_m)$. Поскольку $\mathrm{sk}_{m+1} / \mathrm{sk}_m$ — букет $(m+1)$-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\mathrm{sk}_m) = H_n(\mathrm{sk}_{m+1})$, и $H_n^W = H_n(\mathrm{sk}_m)$ для всякого $m \ge n+1$. В силу компактности симплекса любой сингулярный симплекс в клеточном пространстве целиком лежит в каком-нибудь остове; отсюда вытекает, что $H_n^W(X) = H_n(X)$. □

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{C}P^n$. Обозначим $e^{(2k)} = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0, z_k \ne 0\}$; здесь $0 \le k \le n$. Подножества $e^{(2k)} \subset \mathbb{C}P^n$ образуют клеточное разбиение: характеристическое отображение $\chi^{(2k)} : D_{2k} = \{(w_0, \dots, w_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mid |w_0|^2 + \dots + |w_k|^2 \le 1\} \to \mathbb{C}P^n$ задано формулой $\chi^{(2k)}(w_0, \dots, w_{k-1}) = [w_0 : \dots : w_{k-1} : \sqrt{1 - (|w_0|^2 + \dots + |w_k|^2)} : 0 : \dots : 0]$ (докажите, что это действительно характеристическое отображение!). Построенное клеточное разбиение содержит одну клетку каждой четной размерности $0, 2, \dots, 2n$. Тем самым клеточный комплекс выглядит как $K \to 0 \to K \to \dots \to 0 \to K$; очевидно, все стрелки нулевые, откуда $H_{2s}(X, K) = K$ при $0 \le s \le n$, а остальные гомологии и когомологии равны нулю. В частности, отсюда вытекает, что комплексные проективные пространства разной размерности гомотопически не эквивалентны.