ЛЕКЦИЯ 8–9

Краткое содержание. Гладкие многообразия. Степень отображения как сумма знаков прообразов: подготовительные леммы и формулировка.

Пример вычисления степени отображения (действия непрерывного отображения сфер на старших гомологиях) с помощью последовательности Майера–Виеториса.

Предложение 1. *Пусть* $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *— невырожденное линейное отображение, и* $\alpha_A : S^n \to S^n$ *определено формулой* $\alpha_A(x) = Ax/|Ax|$. *Тогда* $\deg \alpha_A = 1$, *если* $\det A > 0$, *и* -1, *если* $\det A < 0$. *иначе.*

Доказательство. Докажем вначале лемму из линейной алгебры:

Лемма 1. *Группа* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *невырожденных линейных преобразований состоит из двух компонент линейной связности, одна из которых — подгруппа* $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ *преобразований с положительным определителем, а вторая — множество (класс смежности по* $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$*) преобразований с отрицательным определителем.*

Доказательство. Обозначим $V(n, n)$ (это традиционное обозначение, называется пространством Штифеля) множество базисов в пространстве $\mathbb{R}^n$; например, $e = (e_1, \dots, e_n) \in V(n, n)$ — стандартный базис ($e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единица на k-м месте). Произвольному линейному оператору $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ поставим в соответствие базис $Ae = (Ae_1, \dots, Ae_n) \in V(n, n)$ (составленный из строк матрицы оператора A в стандартном базисе); очевидно, это взаимно однозначное соответствие.

Рассмотрим две операции над базисами: если $v = (v_1, \dots, v_n) \in V(n, n)$, то $I_{j,k,r}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, \dots, v_k + rv_j, \dots, v_n)$ (вектор $v_k + rv_j$ стоит на k-м месте, т.е. к k-й строке матрицы прибавляют j-ю, умноженную на r) и $J_{j,k}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, \dots, -v_k, \dots, v_j, \dots, v_n)$ (k-й и j-й векторы, т.е. k-я и j-я строки матрицы, меняются местами, причем первая меняет знак — это чтобы не менялся определитель). Базис v можно соединить непрерывной кривой в $V(n, n)$ с $I_{j,k,r}(v)$ и с $J_{j,k}(v)$: в первом случае $v(t) = (v_1, \dots, v_k + trv_j, \dots, v_n)$, во втором $v(t) = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_k \cos(\pi t/2) + v_j \sin(\pi t/2), \dots, v_n)$ — проверьте, что $v(t)$ — действительно базис для всякого $0 \le t \le 1$.

Известно, что любую матрицу можно привести к верхнетреугольному виду с помощью нескольких операций этих двух типов. Полученная верхнетреугольная матрица невырождена (мы все время движемся внутри $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$) и, следовательно, не имеет нулей на диагонали. Отсюда вытекает, что такими же преобразованиями ее можно превратить в диагональную с теми же элементами на диагонали. Тем самым мы доказали, что всякий базис $v \in V(n, n)$ лежит в одной компоненте линейной связности с базисом вида $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) \in V(n, n)$.

Такой базис можно соединить кривой (какой?) с базисом $(\sigma_1 e_1, \dots, \sigma_n e_n)$, где $\sigma_i = \lambda_i/|\lambda_i| = \pm 1$. Определитель матрицы при этом изменится, но его знак — нет (поскольку набор строк всегда остается базисом, то есть определитель не равен нулю). Кроме того, применяя операцию $J_{j,k}$ два раза, можно сменить знак у σ_j и σ_k одновременно, не меняя остальных σ_i. Тем самым, в зависимости от четности числа минусов в $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (т.е. от знака определителя исходной матрицы), мы получим кривую, соединяющую исходный базис либо со стандартным, либо с базисом $(-e_1, e_2, \dots, e_n)$. □

Из леммы вытекает, что отображение α_A при $\det A > 0$ гомотопно отображению $\alpha_I = \mathrm{id}_{S^n}$, степень которого равна 1, а при $\det A < 0$ — отображению α_S, где $S(x_0, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (-x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Покроем теперь сферу S^n множествами $U_1 = S^n \setminus \{a\}$, $U_2 = S^n \setminus \{b\}$, где $a = (1, 0, \dots, 0)$ и $b = (-1, 0, \dots, 0)$ — полюса сферы, и рассмотрим точную последовательность комплексов $0 \to C(U_1 \cap U_2) \to C(U_1) \oplus \mathcal{C}(U_2) \to C^{U_1,U_2}(S^n) \to 0$. Отображение α_S гомеоморфно отображает множества U_1 и U_2 друг в друга и тем самым порождает коммутативную (почему?) диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C(U_1 \cap U_2) & \to & C(U_1) \oplus C(U_2) & \to & C^{U_1,U_2}(S^n) & \to & 0 \\ & & \downarrow (\alpha_S)_* & & \downarrow (\alpha_S)_* & & \downarrow (\alpha_S)_* & & \\ 0 & \to & C(U_2 \cap U_1) & \to & C(U_2) \oplus C(U_1) & \to & C^{U_2,U_1}(S^n) & \to & 0 \end{array}.$$

Применяя к ней конструкцию из теоремы Бокштейна, получим коммутативную диаграмму последовательностей Майера–Виеториса; рассмотрим такой ее фрагмент:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\delta_{12}} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & 0 \\ & & \downarrow \times \deg \alpha_S & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\delta_{21}} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & 0 \end{array}$$

($U_1 \cap U_2$ деформационно ретрагируется на экватор сферы, гомеоморфный S^{n-1}). Здесь δ_{12} — связывающий гомоморфизм, построенный по покрытию U_1, U_2; из точности последовательности вытекает, что он является изоморфизмом.

В этой диаграмме левая вертикальная стрелка — отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, состоящее в умножении на $\deg \alpha_S$ (по определению степени). Ограничение α_S на экватор — тождественное отображение, так что правая вертикальная стрелка — тождественное отображение. Связывающий гомоморфизм δ_{21} в нижней строке строится по покрытию U_2, U_1. Из конструкции связывающего гомоморфизма в последовательности Майера–Виеториса вытекает (проверьте!), что $\delta_{21} = -\delta_{12}$. Из коммутативности диаграммы теперь следует, что $\deg \alpha_S = -1$ и, следовательно, $\deg \alpha_A = -1$. □

Пусть теперь $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкое отображение, для которого $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0)$ невырождена ($\varphi'(0)$ это матрица частных производных $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0)$ компонент образа $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x))$ по компонентам прообраза $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$). Тогда по теореме об обратной функции существует $\varepsilon > 0$ такое, что φ диффеоморфно (взаимно однозначно, гладко и так, что обратное отображение — тоже гладкое) отображает шар $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \le \varepsilon\}$ на его образ. Если $\partial B_\varepsilon(0) = S^n$ — граничная сфера шара, а $p_\varepsilon : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ — проекция вдоль радиуса всего пространства, кроме начала координат, на эту сферу, то $\alpha_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} p_\varepsilon \circ \varphi|_{S^n}$ — непрерывное отображение $S^n \to S^n$. Следствие из предложения 1, которое нам понадобится в дальнейшем:

Предложение 2. *Степень* α_φ *равна* 1, *если* $\det \varphi'(0) > 0$, *и* -1, *если* $\det \varphi'(0) < 0$.

Доказательство. Обозначим $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ линейное отображение $\psi(x) = \varphi'(0)x$ и докажем, что α_ψ гомотопно α_φ. По формуле Тейлора $\varphi(x) = \psi(x) + \omega(x)$, где $\lim_{x\to 0} \frac{|\omega(x)|}{|x|} = 0$. Поскольку $|\psi(x)| \ge \frac{1}{\|\varphi'(0)^{-1}\|}|x|$ ($\|\cdot\|$ — норма матрицы), получим $\lim_{x\to 0} \frac{|\omega(x)|}{|\psi(x)|} = 0$. Из этого вытекает (убедитесь!), что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и произвольном $0 \le t \le 1$ отображение $\varphi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x) + t\omega(x)$ переводит $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ в себя (т.е. образ не содержит нуля). Следовательно, отображение α_{φ_t} определено при всех t, и таким образом определена гомотопия между $\alpha_{\varphi_0} = \alpha_\psi$ и $\alpha_{\varphi_1} = \alpha_\varphi$.

Теперь требуемое равенство вытекает из предложения 1. □

Гладким многообразием размерности n называется множество M, на котором фиксирован *атлас* — набор (конечный или бесконечный любой мощности) троек $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$, где $U_\alpha \subset M$, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ — взаимно однозначное отображение, если выполнены следущие условия:

1) Существует не более чем счетное множество карт $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots$, объединение которых — все множество M (как следствие, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$).
2) Для любых α, β образ $V_{\alpha\beta} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ открыт.
3) Отображение $\varphi_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$ гладкое (имеет непрерывные частные производные всех порядков; это требование осмысленно, т.к. $V_{\beta\alpha}$ и $V_{\alpha\beta}$ — открытые подмножества $\mathbb{R}^n$).
4) Если $a, b \in M$ и $a \ne b$, то существуют α, β (могут быть и одинаковыми) и открытые множества $W_\alpha \subset V_\alpha$ и $W_\beta \subset V_\beta$ такие, что $a \in U_\alpha$, $x_\alpha(a) \in W_\alpha$, $b \in U_\alpha$, $x_\beta(b) \in W_\beta$, и $x_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap x_\beta^{-1}(W_\beta) = \varnothing$.

Множества U_α называются картами, отображения x_α — координатами, тройки $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$ — системами координат, вся совокупность троек $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$ — атласом, $\varphi_{\alpha\beta}$ — отображениями замены координат.

Очевидные свойства отображений замены координат:

1) $\varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \mathrm{id}_{V_{\alpha\beta}}$.
2) $\varphi_{\gamma\alpha} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \mathrm{id}_{V_{\alpha\beta\gamma}}$, где $V_{\alpha\beta\gamma} = x_\gamma(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Из свойства 2 вытекает, что $\varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha(a))\varphi'_{\beta\alpha}(x_\beta(a)) = \mathrm{Id}$ для произвольного $a \in U_\alpha \cap U_\beta$, откуда $\det \varphi'_{\alpha\beta}(u) \ne 0$ для всех $u \in V_{\alpha\beta}$. Если $\det \varphi'_{\alpha\beta}(u) > 0$ в любой точке u и для всех α, β, то атлас называется ориентированным.

Пример 1. Структура гладкого n-мерного многообразия на сфере $S^n = \{y = (y_0, \dots, y_n) \mid y_0^2 + \dots + y_n^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — атлас из двух карт: $U_1 = \{y \in S^n \mid y_0 \ne 1\}$, $U_2 = \{y \in S^n \mid y_0 \ne -1\}$. Положим $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$, а координатами служат стереографические проекции: $x_1(y) = \frac{1}{1-y_0}(y_1, \dots, y_n)$, $x_2(y) = \frac{1}{1+y_0}(y_1, \dots, y_n)$. Отображение $x_1 : U_1 \to V_1$ взаимно однозначное: если $z = (z_1, \dots, z_n) = x_1(y)$, то $y_0 = \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$ (где $|z|^2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1^2 + \dots + z_k^2$) и $y_k = z_k(1 - y_0)$ для всех $k = 1, \dots, n$ (проверьте!).

Отображение замены координат $\varphi_{12}(z) = \frac{z}{|z|^2}$ (где $z = (z_1, \dots, z_n)$) определено на множестве $V_{12} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и принимает значение в множестве $V_{21} = V_{12}$; обратное отображение φ_{21} задается той же формулой.

Два атласа на одном и том же множестве M называются эквивалентными, если их объединение — тоже атлас (иными словами, если отображения замены координат между координатами первого и второго атласа гладкие — остальные требования к атласу будут для объединения выполнены автоматически). Ясно, что это на самом деле отношение эквивалентности; класс эквивалентности атласов называется гладкой структурой на множестве M.

На гладком многообразии определена топология: подмножество $U \subset M$ считается открытым, если $x_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ открыто для всех α; очевидно (проверьте!), что это на самом деле топология. Свойство 4 в определении делает эту топологию хаусдорфовой, свойство 1 обеспечивает существование счетной базы (база топологии — набор открытых множеств такой, что всякое открытое множество является их объединением). Нетрудно видеть, что топология зависит только от гладкой структуры (а не от конкретного атласа): поскольку гладкое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, эквивалентные атласы дают одну и ту же топологию.

Гладкие многообразия являются объектами категории, морфизмы которой — гладкие отображения. Отображение $f : M_1 \to M_2$ одного многообразия в другое (не обязательно той же размерности) называется гладким, если для какой-нибудь системы координат $(U_\alpha^{(1)}, x_\alpha^{(1)})$ на M_1, такой что $a \in U_\alpha^{(1)}$ и какой-нибудь системы координат $(U_\beta^{(2)}, x_\beta^{(2)})$ на M_2 такой, что $f(a) \in U_\beta^{(2)}$, отображение $f_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} x_\beta^{(2)} \circ f \circ (x_\alpha^{(1)})^{-1}$ — гладкое в некоторой окрестности точки $x_\alpha^{(1)}(a) \in V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. $f_{\alpha\beta}$ называется записью отображения f в координатах $x_\alpha^{(1)}$, $x_\beta^{(2)}$. Если выбрать на M_1 и M_2 другие карты (и соответствующие координаты) $U_\gamma^{(1)} \ni a$ и $U_\delta^{(2)} \ni f(a)$, то запись отображения в координатах соответственно изменится:

$$(1) \qquad f_{\gamma\delta} \stackrel{\text{def}}{=} x_\delta^{(2)} \circ f \circ (x_\gamma^{(1)})^{-1} = x_\delta^{(2)} \circ (x_\beta^{(2)})^{-1} \circ x_\beta^{(2)} \circ f \circ (x_\alpha^{(1)})^{-1} \circ x_\alpha^{(1)} \circ (x_\gamma^{(1)})^{-1} = \varphi_{\delta\beta} \circ f_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\alpha\gamma}$$

("формула замены координат"). Поскольку отображения замены координат $\varphi_{\delta\beta}$ и $\varphi_{\alpha\gamma}$ гладкие, гладкость $f_{\alpha\beta}$ не зависит от выбора α и β.

Пример 2. Ту же S^n можно покрыть $2n$ картами $U_k^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{y = (y_0, \dots, y_n) \in S^n \mid y_k > 0\}$, $U_k^- \stackrel{\text{def}}{=} \{y = (y_0, \dots, y_n) \in S^n \mid y_k < 0\}$; координаты $x_k^+(y) = (y_0, \dots, \widehat{y_k}, \dots, y_n)$, отображение перехода между U_k^+ и U_l^+ при $k < l$ это $\varphi_{kl}^{++}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, \widehat{z_k}, \dots, z_{l-1}, \sqrt{1 - (z_1^2 + \dots + z_n^2)}, z_l, \dots, z_n)$ отображает $V_{kl}^{++} \to V_{lk}^{++}$, где все $V_{kl}^{++} \subset \mathbb{R}^n$ — шары единичного радиуса с центром в начале координат; для других сочетаний индексов и знаков аналогично. Непосредственная проверка показывает (проделайте!), что отображения замены координат между данным атласом и атласом примера 1 гладкие, так что эти атласы эквивалентны (принадлежат одной и той же гладкой структуре на S^n).

Пусть $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение двух многообразий одной размерности. Точка $a \in M_1$ называется критической, если $\det f'_{\alpha\beta}(x_\alpha(a)) = 0$ для некоторых карт $U_\alpha \subset M_1$, $U_\beta \subset M_2$, $a \in U_\alpha$, $f(a) \in U_\beta$. Из формулы (1) вытекает, что для любых двух пар систем координат в окрестностях точек a и $f(a)$ выполнено равенство

$$(2) \qquad \det f'_{\gamma\delta}(x_\gamma(a)) = \det \varphi'_{\delta\beta}(x_\beta(f(a)) \det f'_{\alpha\beta}(x_\alpha(a)) \det \varphi'_{\gamma\alpha}(x_\gamma(f(a)).$$

Следовательно, если если точка a критическая, то $\det f'_{\alpha\beta}(x_\alpha(a)) = 0$ для любых α и β.

Предположим теперь, что атласы на многообразиях M_1, M_2 ориентированные, и a — некритическая точка отображения f. Из формулы (2) теперь вытекает, что (атлас ориентированный, так что $\det \varphi'_{\alpha\beta}(u) > 0$ для всех α, β и u), что $\det f'_{\gamma\delta}(x_\gamma(a))$ и $\det f'_{\alpha\beta}(x_\alpha(a))$ имеют один и тот же знак; этот знак обозначим $\operatorname{sign}(a) = \pm 1$.

Точка $c \in M_2$ называется критическим значением f, если существует критическая точка a такая, что $f(a) = c$; если такой точки не существует (в том числе если $f^{-1}(c) = \varnothing$), то c называется регулярным значением.

Предложение 3. *Пусть M_1, M_2 — компактные гладкие многообразия одной и той же размерности, пусть $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, и $c \in M_2$ — его регулярное значение. Тогда множество $f^{-1}(c) \subset M_1$ конечно.*

Доказательство. Пусть $f^{-1}(c) \subset M_1$ бесконечно. Поскольку M_1 компактно, $f^{-1}(c)$ имеет предельную точку a. В силу непрерывности f множество $f^{-1}(c)$ также и замкнуто, так что $a \in f^{-1}(c)$.

Зафиксируем системы координат $(U_\alpha, x_\alpha), (U_\beta, x_\beta)$ на M_1 и M_2 соответственно такие, что $a \in U_\alpha$, $f(a) \in U_\beta$, и пусть $F \stackrel{\text{def}}{=} f_{\alpha\beta}$. Поскольку c — регулярное значнеие, $\det F'(x_\alpha(a)) \neq 0$. По теореме об обратной функции отсюда следует, что F взаимно однозначно отображает некоторую окрестность точки $x_\alpha(a)$ на некоторую окрестность точки $x_\beta(f(a)) = x_\beta(c)$. Но это противоречит тому, что в любой окрестности a найдутся точки $b \neq a$ такие, что $f(b) = c$. □

Теорема 1. *Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение, $c \in S^n$ — регулярное значение. Тогда* $\sum_{a \in f^{-1}(c)} \operatorname{sgn}(a) = \deg f$.

Доказательство. Пусть $f^{-1}(c) = \{a_1, \dots, a_N\}$. Согласно теореме об обратной функции существует открытый шар B с центром в точке c, такой что $f^{-1}(B) = B_1 \cup \dots \cup B_N$, где множества B_i попарно не пересекаются, $a_i \in B_i$ и $f|_{B_i} : B_i \to B$ — гомеоморфизм (для всех i). Рассмотрим покрытие S^n (области определения f) множествами $U_1 = S^n \setminus f^{-1}(c)$ и $U_2 = B_1 \cup \dots \cup B_N$, и покрытие S^n (области значений f) множествами $V_1 = S^n \setminus \{c\}$ и $V_2 = B$. Отображение f переводит одно покрытие в другое и, следовательно, как в доказательстве предложения 1, порождает коммутативную диаграмму последовательностей Майера–Вириториса.

Множества V_1 и V_2 гомеоморфны шарам и, следовательно, стягиваемы. Множество U_1 (сфера S^n без N точек) гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ без $(N-1)$ точек и гомотопически эквивалентно букету $(N-1)$ сфер размерности $n-1$. Множество U_2 гомеоморфно объединению N шаров и гомотопически эквивалентно дискретному множеству из N точек. Пересечение $V_1 \cap V_2$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}; пересечение $U_1 \cap U_2$ — дизъюнктному объединению N сфер S^{n-1}. Поэтому один из фрагментов коммутативной диаграммы выглядит так:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}^{N-1} & \\
 & || & & || & & || & & || & \\
\cdots \to & H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\lambda} & H_{n-1}(S^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup S^{n-1}) & \xrightarrow{\iota_*} & H_{n-1}(U_1) \oplus H_{n-1}(U_2) & \to \dots \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow 0 & \\
\cdots \to & H_n(V_1) \oplus H_n(V_2) & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & H_{n-1}(V_1) \oplus H_{n-1}(V_2) & \to \dots \\
 & || & & || & & || & & || & \\
 & 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 &
\end{array}
$$

Поскольку группа $\mathbb{Z}$ имеет две образующих (1 и -1), для вычислений нужно зафиксировать изоморфизмы, обозначенные вертикальными знаками равенства в каждом месте диаграммы. Поскольку шар B_i маленький, можно считать, что он лежит в некоторой карте U_i с координатой x_i; без ограничения общности $U_i = B_i$ (мы можем просто добавить к атласу карту B_i, координата на которой — ограничение отображения x_i). Тогда x_i^{-1} взаимно однозначно отображает $x_i(B_i) \setminus \{x_i(a_i)\}$ в $B_i \setminus \{a_i\}$ и тем самым порождает изоморфизм $(x_i^{-1})_* : H_{n-1}(x_i(B_i) \setminus \{x_i(a_i)\}) \to H_{n-1}(B_i \setminus \{a_i\})$. Множество $x_i(B_i) \setminus \{x_i(a_i)\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_i(a_i)\}$ деформационно ретрагируется на сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ произвольного радиуса $\varepsilon > 0$ с центром $x_i(a_i)$, так что мы можем зафиксировать образующую $\mathbf{1} \in H_{n-1}(x_i(B_i) \setminus \{x_i(a_i)\})$ раз и навсегда; теперь в качестве образующей $H_{n-1}(B_i \setminus \{a_i\})$ возьмем $r_i \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^{-1})_*(\mathbf{1})$.

Лемма 2. *Если V — другая карта того же атласа, снабженная координатой y, причем $B_i \subset V$, то $y_*(\mathbf{1}) = r_i$.*

Доказательство. Пусть $\varphi = y \circ x_i^{-1}$ — отображение замены координат (между x_i и y). Тогда $y = \varphi \circ x_i$, откуда $y_* = \varphi_* \circ (x_i)_*$. Атлас ориентированный, поэтому согласно предложению 2 $\varphi_* = \mathrm{id}$. □

Лемма позволяет зафиксировать изоморфизмы с $\mathbb{Z}^N$, $\mathbb{Z}^{N-1}$ и $\mathbb{Z}$ в третьей и четвертой колонке диаграммы. В силу точности последовательности в нижней строке δ — изоморфизм; это позволяет выбрать образующую в $H_n(S^n)$ (т.е. изоморфизм $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ во второй колонке снизу) так, чтобы $\delta = \mathrm{id}$.

Очевидно, $H_{n-1}(S^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup S^{n-1})$ изоморфно $(H_{n-1}(S^{n-1}))^N$, причем изоморфизм не зависит от выбора образующих $r_1, \dots, r_N$ в каждой копии $H_{n-1}(S^{n-1})$. Рассмотрим вложение $\kappa_i : S^n \setminus \{a_1, \dots, a_N\} \hookrightarrow S^n \setminus \{a_i\}$; очевидно (почему?), что $(\kappa_i)_* r_i \in H_{n-1}(S^n \setminus \{a_i\})$ — образующая (одна из двух), и $(\kappa_i)_* r_j = 0$ при $j \neq i$. Образующей $(\kappa_i)_* r_i$ соответствует некоторая образующая в $s \in H_n(S^n)$ — конструкция такая же, как в последовательности Майера–Виеториса из нижней строки. Поскольку атлас ориентированный, эта образующая одна и та же для всех $i = 1, \dots, N$ (докажите!). Мы используем эту образующую, чтобы зафиксировать изоморфизм сверху во второй колонке, откуда получается, что отображение $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^N$ равно $(1, \dots, 1)$ (имеет матрицу $1 \times N$, составленную из одних единиц).

По определению степени гомоморфизм $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ является теперь умножением на $\deg f$, действующим $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. По определению знака некритической точки гомоморфизм $f_* : H_{n-1}(S^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ равен $(\mathrm{sign}(a_1), \dots, \mathrm{sign}(a_N))^T$ (имеет матрицу $N \times 1$, i-й элемент которой — знак точки a_i). Утверждение теоремы теперь вытекает из коммутативности центрального квадрата на диаграмме: $1 \cdot \deg f = (1, \dots, 1)(\mathrm{sign}(a_1), \dots, \mathrm{sign}(a_N))^T = \mathrm{sign}(a_1) + \cdots + \mathrm{sign}(a_N)$. □