ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Старшие гомологии многообразия.

Теорема 1 (о вырезании). *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ открыто, а $B \subset A$ замкнуто. Пусть $\iota : A \to X$ — тавтологическое вложение (каждой точке $a \in A$ сопоставляется она сама, но уже как элемент X). Тогда $\iota_* : H_n(X \setminus B, A \setminus B) \to H_n(X, A)$ — изоморфизм при всех n.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие X двумя открытыми множествами: $U_1 = A$, $U_2 = X \setminus B$, и пусть $C^U(X) \subset C(X)$ — подкомплекс сингулярного комплекса X, состоящий из цепей, порожденных сингулярными симплексами, образы которых лежат либо в U_1, либо в U_2. Гомологии фактор-комплекса $C^U(X)/C(A)$ изоморфны гомологиям комплекса $C(X)/C(A)$ — это относительный вариант “леммы об измельчении” (теорема 1 лекции 3–4), доказывается так же. С другой стороны, комплекс $C^U(X)/C(A)$ изоморфен $C(X\setminus B)/C(A\setminus B)$ — оба порождены сингулярными симплексами, образ которых лежит в $X \setminus B$, но не лежит в A. □

Следствие. *Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $a \in M$. Тогда $H_n(M, M \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Поскольку M — n-мерное многообразие, существует открытое подмножество $U \subset M$, $a \in U$, гомеоморфное $\mathbb{R}^n$. По теореме о вырезании, в которой $A = M \setminus \{a\}$, $B = M \setminus U$, получим $H_n(M, M \setminus \{a\}) = H_n(U, U \setminus \{a\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Равенство $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ получается из точной последовательности пары; подробности — упражнение. □

Образующая группы $H_n(M, M \setminus \{a\})$ (согласно следствию, их существует две) называется локальной ориентацией многообразия M в точке a. Обозначим $\widetilde{M} = \{(a, \mu) \mid a \in M, \mu$ — локальная ориентация в точке $a\}$. Для произвольного $A \subset M$, $a \in A$, тавтологическое вложение $\iota_{a,A} : M \setminus A \to M \setminus \{a\}$ порождает гомоморфизм гомологий $(\iota_{a,A})_* : H_n(M, M \setminus A) \to H_n(M, M \setminus \{a\})$.

Пусть теперь $U \subset M$ открыто и гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, и $a \in M$. Тогда вложение $\iota_{a,U}$ — гомотопическая эквивалентность, откуда $(\iota_{a,U})_*$ — изоморфизм. Пусть $\nu \in H_n(M, M \setminus U) = \mathbb{Z}$ — образующая; обозначим $R_{U,\nu} = \{(a, (\iota_{a,U})_*(\nu)) \mid a \in U\} \subset \widetilde{M}$.

Теорема 2. *Множества $R_{U,\nu}$ образуют базу топологии в $\widetilde{M}$. В этой топологии отображение $\Phi : \widetilde{M} \to M$, действующее по формуле $\Phi(a, \nu) = a$, является двулистным накрытием. Если U — карта на M и $x_U : U \to \mathbb{R}^n$ — система координат, то $y_U \stackrel{\text{def}}{=} x_U \circ \Phi$ — система координат в $R_{U,\nu}$; тогда $\{(R_{U,\nu}, y_U)\}$ — атлас на $\widetilde{M}$.*

Доказательство. Очевидно, $\bigcup_{U,\nu} R_{U,\nu} = \widetilde{M}$, где U пробегает все карты на M, гомеоморфные $\mathbb{R}^n$, а ν для каждой U принимает оба возможных значения. Пусть $U_1, U_2 \subset M$ открыты и гомеоморфны $\mathbb{R}^n$, и $(a, \mu) \in R_{U_1,\nu_1} \cap R_{U_2,\nu_2}$. Тогда существует $U \subset U_1 \cap U_2$, гомеоморфное $\mathbb{R}^n$, для которого $a \in U$. Пусть $\nu_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{a,U_1})_*^{-1}(\mu)$, $\nu_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{a,U_2})_*^{-1}(\mu)$. Поскольку $\iota_{a,U}\iota_{U,U_1} = \iota_{a,U_1}$, получим $\mu = (\iota_{a,U})_*(\iota_{U,U_1})_*\nu_1$ и, аналогично, $\mu = (\iota_{a,U})_*(\iota_{U,U_2})_*\nu_2$. Поскольку $(\nu_{a,U})_*$ — изоморфизм, получим $(\iota_{U,U_1})_*\nu_1 = (\iota_{U,U_2})_*\nu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \nu$. Таким образом, $(a, \mu) \in R_{U,\nu}$, что и означает (почему?), что множества $R_{U,\nu}$ при всевозможных U и ν образуют базу топологии на $\widetilde{M}$.

Для доказательства того, что Φ — накрытие, заметим, что множества $R_{U,\nu}$ с одним и тем же U, но различными ν (их два) не пересекаются. Отображение $\Phi : R_{U,\nu} \to U$ — гомеоморфизм: если $a \in V \subset U$, где V открыто, то $(a, (\iota_{a,U})_*\nu) \in R_{V,(\iota_{VU})_*\nu} \subset R_{U,\nu}$; множество $R_{V,(\iota_{VU})_*\nu}$ открыто, что и означает непрерывность. Следовательно, Φ — накрытие.

Доказательство последнего утверждения — (легкое) упражнение. □

Теорема 3. *Накрытие $\widetilde{M} \to M$ тривиально тогда и только тогда, когда на M существует ориентированный атлас.*

Доказательство. Пусть на M существует ориентированный атлас. Без ограничения общности можно считать, что все его системы координат (U, x_U) таковы, что $V \stackrel{\text{def}}{=} x_U(U) \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар. Пусть $\varrho \in H_{n-1}(S^{n-1})$, где S^{n-1} — граница шара V — образующая, соответствующая стандартной ориентации шара в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\varrho_p \in H_n(V, V \setminus \{p\})$ — образ ϱ при изоморфизме $H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_n(V, V \setminus \{p\})$; здесь $p \in V$ — произвольная точка. Пусть теперь $a \in U$ и $\mu_{U,a} = (x_U)_*^{-1}\varrho_{x_U(a)} \in H_n(U, U \setminus \{a\}) = H_n(M, M \setminus \{a\})$. От выбора системы координат (U, x_U) класс гомологий $\mu_{U,a}$ не зависит: если $(W.x_W)$ — другая система координат в окрестности $W \ni a$, то $\mu_{W,a} = (x_W)_*^{-1} \varrho_{x_W(a)} = (x_U)_*^{-1} (\psi_{WU})_* \varrho_{x_W(a)}$, где ψ_{WU} — отображение замены координат. Поскольку $\det \psi'_{WU} > 0$ во всех точках, $(\psi_{WU})_* \varrho_{x_W(a)} = \varrho_{x_U(a)}$. Тем самым мы можем обозначить $\mu_a \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{U,a}$ для произвольного U. Поскольку все классы ϱ_p являются образами одного и того же класса ψ, точка $(a, \mu_a) \in \widetilde{M}$ непрерывно зависит от a — это сразу следует из определения топологии в $\widetilde{M}$. Тем самым построено сечение $a \mapsto (a, \mu_a)$ накрытия $\Phi : \widetilde{M} \to M$; но двулистное накрытие, имеющее сечение, тривиально.

Обратно, пусть $\Phi : \widetilde{M} \to M$ тривиально и, следовательно, имеет сечение: для каждой точки $a \in M$ можно выбрать образующую $\xi_a \in H_n(M, M \setminus \{a\})$ так, что для каждой точки a в некоторой карте $U \ni a$ существует класс $\nu \in H_n(M, M \setminus U)$ такой, что $\xi_b = (\iota_{b,U})_* \nu$ для всех $b \in U$. Если при этом $\xi_a = \mu_{U,a}$, где $\mu_{U,a}$ определено как выше, то оставим систему координат (U, x_U) неизменной, а если $\xi_a = -\mu_{U,a}$ (больше возможностей нет), то заменим x_U на $\tilde{x}_U = r_1 \circ x_U$, где r_1 — линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, меняющее знак первой координаты (в принципе, можно заменить r_1 любым другим линейным отображением с отрицательным определителем). При такой замене координат $\mu_{U,a}$ меняет знак, так что после всех замен мы получаем $\xi_a = \mu_{U,a}$ при всех a и всех U. Отсюда вытекает (так же как в первой части доказательства), что $\psi_{WU} \varrho_{x_W(a)} = \varrho_{x_U(a)}$ для всех U, W и $a \in U \cap W$. Следовательно, $\det \psi'_{WU} > 0$, то есть атлас после замен стал ориентированным. $\square$

Теорема 4. *Пусть M — многообразие, $A \subset M$ компактно, и $\mu : A \to \widetilde{M}$ — сечение ориентирующего накрытия, определенное на A. Тогда существует и единствен элемент $\Psi(\mu) \in H_n(M, M \setminus A)$ такой, что $\mu(a) = (\iota_{a,A})_* \Psi(\mu)$ для всякого $a \in A$. Кроме того, $H_k(M, M \setminus A) = 0$ при $k > n$.*

Следствие 1. *Если M — компактное ориентируемое n-мерное многообразие, то $H_n(M) = \mathbb{Z}$, и $H_k(M) = 0$ при $k > n$.*

Доказательство следствия 1. Положим $A = M$; тогда из теоремы вытекает, что гомоморфизм $H_n(M, \varnothing) = H_n(M) \to H_n(M, M \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$ из точной последовательности пары $(M, M \setminus \{a\})$ является изоморфизмом. Кроме того, при $k > n$ имеем $H_k(M) = H_k(M, \varnothing) = 0$. $\square$

Лемма 1. *Если теорема 4 верна для подмножеств $P, Q \subset M$ и их пересечения $P \cap Q$, то она верна и для $P \cup Q$.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие $M \setminus (P \cap Q)$ двумя открытыми множествами $U_1 = M \setminus P$ и $U_2 = M \setminus Q$. Тогда возникает короткая точная последовательность комплексов $0 \to \mathcal{C}(M)/\mathcal{C}(M \setminus (P \cup Q)) \to \mathcal{C}(M)/\mathcal{C}(M \setminus P) \oplus \mathcal{C}(M)/\mathcal{C}(M \setminus Q) \to \mathcal{C}(M)/\mathcal{C}^{(M \setminus P, M \setminus Q)}(M \setminus (P \cap Q)) \to 0$; здесь $\mathcal{C}^{(M \setminus P, M \setminus Q)}(M \setminus (P \cap Q))$ — свободный модуль, порожденный сингулярными симплексами, образ которых лежит либо в $M \setminus P$, либо в $M \setminus Q$. Как и при доказательстве теоремы Майера–Виеториса, доказывается, что гомологии последнего члена последовательности равны $H(M, M \setminus (P \cap Q))$. Применяя теорему Бокштейна, получим точную последовательность, аналогичную последовательности Майера–Виеториса; для каждого k она содержит такой фрагмент: $H_{k+1}(M, M \setminus (P \cap Q)) \to H_k(M, M \setminus (P \cup Q)) \to H_k(M, M \setminus P) \oplus H_k(M, M \setminus Q) \to H_k(M, M \setminus (P \cap Q))$. Если $k > n$, то по предположению, равны 0 все члены этого фрагмента, кроме $H_k(M, M \setminus (P \cup Q))$ — из точности вытекает, что он тоже равен 0.

Пусть $k = n$ и μ — сечение накрытия над $P \cup Q$. Ограничения μ являются сечением и над P, и над Q, и над $P \cap Q$. Тогда образ $\Psi(\mu|_P)$ при гомоморфизме $H_n(M, M \setminus P) \to H_n(M, M \setminus \{a\})$ есть $\mu(a)$ для каждой точки $a \in P$ — в частности, для каждой точки $a \in P \cap Q$. Тем же свойством обладает класс $\Psi(\mu|_{P \cap Q})$. Поскольку по предположению такой класс в $H_n(M, M \setminus (P \cap Q))$ единственный, имеем $(\iota_{P \cap Q, P})_* \Psi(\mu|_P) = \Psi(\mu|_{P \cap Q})$; аналогично для $\Psi(\mu|_Q)$. Отсюда вытекает, что элемент $\Psi(\mu|_P) - \Psi(\mu|_Q)$ принадлежит ядру самой правой стрелки фрагмента и, следовательно, образу второй стрелки справа. Иными словами, существует класс $\nu \in H_n(M, M \setminus (P \cup Q))$ такой, что $(\iota_{P, P \cup Q})_* \nu = \Psi(\mu|_P)$ и аналогично для Q. Поэтому для всякой $a \in P$ получим $(\iota_{a, P \cup Q})_* \nu = (\iota_{a,P})_* \Psi(\mu|_P) = \mu(a)$, и аналогично для $a \in Q$. Следовательно, класс ν можно принять за $\Psi(\mu)$ (на всем $P \cup Q$). Единственность такого класса вытекает из того, что по предположению левый член фрагмента все равно 0, так что нужный нам гомоморфизм — вложение. $\square$

Доказательство теоремы 4. В случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, а $A \subset M$ — выпуклое подмножество, теорема очевидна, т.к. $\{a\}$ — деформационный ретракт A, откуда вытекает, что $(\iota_{a,A})_* : H_n(M, M \setminus A) \to H_n(M, M \setminus \{a\})$ — изоморфизм. Если теперь $M = \mathbb{R}^n$, а $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — конечное объединение выпуклых компактов, то теорема получается индукцией по m с применением леммы 1.

Пусть теперь $M = \mathbb{R}^n$, а $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Он ограничен; пусть $B \supset A$ — шар. Поскольку ориентирующее накрытие над $\mathbb{R}^n$ тривиально (как и любое накрытие), сечение μ можно продолжить (однозначно) до сечения $\tilde{\mu}$ на B. Но класс $\Psi(\tilde{\mu})$ существует, поскольку B выпукло — следовательно, положим $\Psi(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} (\iota_{A,B})_* \Psi(\tilde{\mu})$, так что существование доказано. Единственность: пусть $z_1, z_2 \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R}^n)$ — сингулярные цепи, представляющие классы $[z_1], [z_2] \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$, для которого $(\iota_{a,A})_*[z_1] = (\iota_{a,A})_*[z_2] = \mu(a)$ при всех $a \in A$. В частности, z_1, z_2 — относительные циклы, т.е. ∂z_1, ∂z_2 состоят из сингулярных симплексов, образы которых не пересекаются с A. Поскольку симплексов в ∂z_1, ∂z_2 конечное число, объединение их образов —

компакт $L \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Для произвольной точки $a \in A$ существует шар $B_\delta(a)$ с центром в a, не пересекающий L. В силу компактности A можно покрыть конечным объединением таких шаров. Если K — это объединение, то $A \subset K \subset \mathbb{R}^n \setminus L$. Тогда z_1, z_2 — относительные циклы в $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$; обозначим $[z_1]_K, [z_2]_K \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ представляемые ими классы гомологий. Поскольку ориентирующее (как и любое) накрытие $\mathbb{R}^n$ тривиально, произвольное сечение $\mu : A \to \widetilde{\mathbb{R}^n}$ можно однозначно продолжить до сечения μ_K на K, и тогда $(\iota_{a,K})_*[z_1]_K = (\iota_{a,K})_*[z_2]_K = \mu_K(a)$ для всех $a \in K$ (почему?). Поскольку для K теорема уже доказана (это объединение конечного числа шаров, т.е. выпуклых множеств), существует единственный класс $\Psi(\mu_K)$ с таким свойством; значит, $[z_1]_K = \Psi(\mu_K) = [z_2]_K$. Отсюда $[z_1] = (\iota_{A,K})_*[z_1]_K = (\iota_{A,K})_*[z_2]_K = [z_2]$, и теорема доказана для A при $k = n$. Если $k > n$, то $[z]_K \in H_k(M, M \setminus K) = 0$, откуда $[z] = (\iota_{A,K})_*[z]_K = 0$. Поскольку z — произвольный относительный цикл, получаем $H_k(M, M \setminus A) = 0$, так что теорема доказана для $M = \mathbb{R}^n$ и произвольного компактного A.

Пусть теперь M — произвольное n-мерное многообразие. Компактное подмножество $A \subset M$ можно представить в виде конечного объединения $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$, где все A_i — компакты, и для каждого i существует карта $U \supset A_i$, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$. Если $m = 1$, то система координат x_U переносит теорему в $\mathbb{R}^n$, где она уже доказана. Если $m > 1$, то применим индукцию по m: пусть $P = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$ и $Q = A_m$. По предположению индукции теорема верна для P, Q и $P \cap Q$; теперь из леммы 1 вытекает, что она верна и для $A = P \cup Q$. $\square$

Упражнение. Докажите аналог следствия 1 для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В этом случае ориентируемость многообразия не требуется!