# ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Сингулярные когомологии. Умножение в когомологиях.

Пусть $X$ — произвольное топологическое пространство, $K$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим $C^n(X,K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(C_n(X,K),K)$ модуль над $K$, состоящий из гомоморфизмов из $K$-модуля сингулярных цепей в $K$. Гомоморфизмы называются коцепями; поскольку модуль $C_n(X,K)$ свободный, любая коцепь $a \in C^n(X,K)$ однозначно задается своими значениями $a(f)$ на сингулярных симплексах $f : \Delta_n \to X$. Оператор $\delta_n : C^n(X,K) \to C^{n+1}(X,K)$ определяется как двойственный к оператору $\partial_{n+1} : C_{n+1}(X,K) \to C_n(X,K)$: $(\delta_n a)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a(\partial_{n+1}x)$ для произвольной $n$-коцепи $a$ и произвольной $(n+1)$-цепи $x$. Очевидно, $\delta^2 = 0$ (где, как обычно, $\delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_n \delta_n$), что превращает прямую сумму $C^\cdot(X,K) = \bigoplus_n C^n(X,K)$ в комплекс; его гомологии $H^n(C,K) = \mathrm{Ker}\,\delta_n / \mathrm{Im}\,\delta_{n-1}$ называются $n$-ми сингулярными когомологиями пространства $X$.

Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то возникает отображение $f^\# : C^n(Y,K) \to C^n(X,K)$, двойственное к соответствующему отображению сингулярных цепей: $(f^\#(a))(x) = a(f_\#(x))$ для любой цепи $x \in C_n(X,K)$ и любой коцепи $a \in C^n(Y,K)$. Очевидно (почему?), $f^\#$ коммутирует с дифференциалами $\delta$; тем самым $f^\#$ является морфизмом комплексов и порождает соответствующее отображение когомологий $f^* : H^n(Y,K) \to H^*(X,K)$. Тем самым $H^*(\cdot,K)$ — контравариантный функтор из категории топологических пространств в категорию градуированных $K$-модулей. Как и для гомологий, доказывается, что отображение $f^*$ не меняется при гомотопии; отсюда вытекает, что когомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны, а $H^*(\cdot,K)$ — функтор из гомотопической категории.

Пусть $\varphi \in C_n(X,K)$, $u \in C^n(X,K)$; тогда определен элемент $\langle u,\varphi\rangle \in K$; по определению $C^n(X,K)$, так задано билинейное отображение $C^n(X,K) \otimes C_n(X,K) \to K$. Очевидно, если $\varphi$ — цикл ($\partial\varphi = 0$), то $\langle \delta u,\varphi\rangle = 0$ для любой $u$, и наоборот, если $u$ — коцикл, то $\langle u,\partial\varphi\rangle = 0$ для любого $\varphi$. Отсюда вытекает, что определено билинейное спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle : H^n(X,K) \otimes H_n(X,K) \to K$. Нетрудно проверить (проделайте!), что это спаривание *естественно*: если $f : Y \to X$, то $\langle f^*p, y\rangle = \langle p, f_*y\rangle$ для любых $p \in H^n(X,K)$, $y \in H_n(Y,K)$.

*Пример* 1. $C_0(X,K)$ — $K$-модуль, свободно порожденный точками пространства $X$; тогда элементы $p \in C^0(X,K)$ — функции $X \to K$. Пусть $p \in C^0(X,K)$ — коцикл: $\delta p = 0$, то есть $p(\partial\gamma) = 0$ для любого сингулярного 1-симплекса (кривой) $\gamma : [0,1] \to X$. Поскольку $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$, это означает, что $p(\gamma(0)) = p(\gamma(1))$. В силу того, что $\gamma$ — произвольная кривая, это означает, что функция $p$ постоянна на каждой компоненте связности пространства $X$. Следовательно, $H^0(X,K)$ — множество функций из множества компонент линейной связности $X$ в $K$. Билинейное спаривание $H^0(X,K) \otimes H_0(X,K) \to K$ сопоставляет функции $p \in H^0(X,K)$ и компоненте связности $X_i$ (напомним, что $H_0(X,K)$ — модуль, свободно порожденный компонентами линейной связности) значение функции $p$ в произвольной точке $x \in X_i$.

*Пример* 2. Как известно, $H_n(S^n,K) = K = H^n(S^n,K)$ при $n \geq 1$ и $H^0(S^0,K) = K^2 = H_0(S^0,K)$ (поскольку $S^0$ — две точки). Из примера 1 следует, что спаривание $H_0(S^0,K) \otimes H^0(S^0,K) \to K$ задается формулами $\langle (u,v),(\varphi,\psi)\rangle = u\varphi + v\psi$, где $u,v,\varphi,\psi \in K$.

Докажем индукцией по $n$, что при $n \geq 1$ спаривание $H_n(S^n,K) \otimes H^n(S^n,K) \to K$ это умножение $K \otimes K \to K$ в кольце $K$. Рассмотрим покрытие $S^n = U_1 \cup U_2$, где $U_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} S^n \setminus \{p\}$, $U_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} S^n \setminus \{q\}$, а $p,q \in S^n$ — полюса сферы, и выпишем для этого покрытия гомологическую и когомологическую последовательности Майера–Виеториса (когомологическая последовательность Майера–Виеториса строится аналогично гомологической).

База индукции $n = 1$: гомологическая последовательность содержит отображение $\beta : H_1(S^1) \to H_0(S^0)$, которая представляет собой линейное отображение $K \to K^2$ с матрицей $(1,-1)$ размера $1 \times 2$. Когомологическая последовательность содержит отображение $b : H^0(S^0) \to H^1(S^1)$ — линейное отображение $K^2 \to K$ с матрицей $(1,-1)^T$ размера $2 \times 1$. Поскольку спаривание между гомологиями и когомологиями естественно, получаем (почему?), что $\langle p, \beta x\rangle = \langle bp, x\rangle$ для всех $p \in H^0(S^0) = K^2$ и $x \in H_1(S^1) = K$. Если $p = (1,0)$ и $x = 1$, то $bp = 1$, $\beta x = (1,-1)$, откуда вытекает, что $\langle 1,1\rangle = \langle (1,0),(1,-1)\rangle = 1$ — база индукции доказана.

Шаг индукции: при $n > 1$ последовательности Майера–Виеториса содержат изоморфизмы $\beta : H_n(S^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ и $b : H^{n-1}(S^{n-1}) \to H^n(S^n)$. Дальнейшее рассуждение — такое же, как при доказательстве базы индукции.

Для удобства обозначим $a_j$ вершину $x_j = 1$ стандартного симплекса $\Delta_n$ (для любого $n \geq j$). Для произвольных $n,s$ и произвольного набора индексов $i_0,\dots,i_s \in \{0,\dots,n\}$ обозначим $u_{i_0,\dots,i_s} : \Delta_s \to \Delta_n$ аффинное отображение, переводящее каждую вершину $a_k \in \Delta_s$ в вершину $a_{i_k} \in \Delta_n$ (очевидно, что такое отображение существует и единственно).

Пусть $p \in C^m(X,K)$, $q \in C^n(X,K)$ — сингулярные цепи, а $f : \Delta_{n+m} \to X$ — сингулярный симплекс; определим коцепь $p \cup q \in C^{m+n}(X,K)$ равенством $(p \cup q)(f) = p(f \circ u_{0,\dots,m})q(f \circ u_{m,\dots,m+n})$ и продолжим ее на весь модуль $C_{n+m}(X,K)$ по линейности.

**Предложение 1.** *Операция $\cup$ билинейна (над $K$) и ассоциативна. Для произвольного непрерывного отображения $F : Y \to X$ верно равенство $F^\#(p \cup q) = F^\# p \cup F^\# q$. Кроме того, $\delta(p \cup q) = \delta p \cup q + (-1)^m p \cup \delta q$ и $q \cup p = (-1)^{mn}(p \cup q) \circ u_{m+n,m+n-1,\dots,0}$.*

Доказательство — прямая проверка. Тем самым комплекс $C^\cdot(X,K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_n C^n(X,K)$ — ассоциативная градуированная $K$-алгебра с единицей, и $F^\#$ — гомоморфизм алгебр; таким образом, $C^\cdot(\cdot,K)$ — контравариантный функтор из топологической категории в категорию комплексов, обладающих структурой ассоциативных градуированных $K$-алгебр.

**Следствие 1.** *Операция $\cup$ задает билинейное (над $K$) ассоциативное умножение (структуру ассоциативной $K$-алгебры) $\cup : H^m(X,K) \otimes H^n(X,K) \to H^{n+m}(X,K)$. Для всякого непрерывного отображения $F : Y \to X$ отображение $F^* : H^*(X,K) \to H^*(Y,K)$ является гомоморфизмом алгебр. Имеет место равенство $p \cup q = (-1)^{mn} q \cup p$, где $p \in H^m(X,K)$, $q \in H^n(X,K)$ (суперкоммутативность). Иными словами, $H^*(\cdot,K)$ является функтором из гомотопической категории топологических пространств в категорию градуированных ассоциативных суперкоммутативных $K$-алгебр.*

*Начало доказательства.* Если $\delta p_1 = 0 = \delta q$ и $p_1 = p_2 + \delta p$, то согласно лемме $p_1 \cup q = p_2 \cup q + \delta(p \cup q)$, откуда вытекает, что оператор $\cup$ определен на когомологиях. Второе утверждение вытекает из второго утверждения леммы.

Третье утверждение следствия (о суперкоммутативности) будет доказано позднее. □

*Пример* 3. Как уже упоминалось (пример 1), когомологии $H^0(X,K)$ — множество функций $X \to K$, постоянных на компонентах линейной связности. Как нетрудно убедиться (проделайте!), умножение $\cup : H^0(X,K) \otimes H^0(X,K) \to H^0(X,K)$ — поточечное умножение таких функций.

Аналогичным образом определяется умножение в относительных когомологиях $H^m(X,Y,K) \otimes H^n(X,Y,K) \to H^{m+n}(X,Y,K)$; утверждения следствия 1 верны и для этого умножения тоже.

Пусть $X_1, X_2$ — топологические пространства, $u \in C^{n_1}(X_1)$, $v \in C^{n_2}(X_2)$. Пусть $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ и $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ — проекции; тогда обозначим $u \times v \stackrel{\mathrm{def}}{=} p_1^* u \cup p_2^* v \in C^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2)$.

**Следствие 2** (предложения 1)**.** *Операция $\times$ билинейна, ассоциативна и удовлетворяет супертождеству Лейбница: $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^{n_1} u \times \delta v$. Если $F_1 : Y_1 \to X_1$ и $F_2 : Y_2 \to X_2$ — произвольные непрерывные отображения, то $(F_1 \times F_2)^\#(u \times v) = (F_1^\# u) \times (F_2^\# v)$.*

**Следствие 3** (следствия 2)**.** *Умножение коцепей $\times$ определяет билинейную ассоциативную операцию $\times : H^{n_1}(X_1) \otimes H^{n_2}(X_2) \to H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2)$, естественную относительно отображений $F^*$: $(F_1 \times F_2)^*(p \times q) = (F_1^* p) \times (F_2^* q)$. Аналогично определяется операция $\times$ в относительных когомологиях $H^{n_1}(X_1,Y_1) \otimes H^{n_2}(X_2,Y_2) \to H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, X_1 \times Y_2 \cup Y_1 \times X_2)$.*

Когомологическое умножение $\times$ определяется через умножение $\cup$; существует также возможность выразить $\cup$ через $\times$. А именно, пусть $X$ — топологическое пространство, и $\Delta : X \to X \times X$ — диагональное вложение: $\Delta(x) = (x,x)$ для всех $x \in X$.

**Предложение 2.** *Для любых классов когомологий $a \in H^m(X,K)$, $b \in H^n(X,K)$ имеет место равенство $a \cup b = \Delta^*(a \times b)$.*

*Доказательство.* $\Delta^*(a \times b) = \Delta^*(p_1^* a \times p_2^* b)$ (по определению умножения $\times$; здесь $p_1, p_2 : X \times X \to X$ — проекции на первый и второй сомножитель) $= (\Delta^* p_1^*) a \cup (\Delta^* p_2^*) b$ (в силу естественности умножения $\cup$) $= (p_1 \circ \Delta)^* a \cup (p_2 \circ \Delta)^* b$ (поскольку когомологии — контравариантный функтор) $= a \cup b$, поскольку $p_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X = p_2 \circ \Delta$. □