2. АЛГЕБРА КОМПЛЕКСОВ

Задача 1 (5-лемма)**.** Дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\ p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow & & s\downarrow & & t\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E' \end{array}$$

В этой диаграмме строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Докажите, что r — изоморфизм.

Задача 2 (формула универсальных коэффициентов–1)**.** Докажите, что если последовательность абелевых групп $A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0$ точна, то для всякой абелевой группы G последовательность $A\otimes G \xrightarrow{p\otimes \mathrm{id}} B\otimes G \xrightarrow{q\otimes\mathrm{id}} C\otimes G \to 0$ точна.

Задача 3 (формула универсальных коэффициентов–2)**.** Пусть $\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — комплекс абелевых групп, в котором $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$ для всех i, а $\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} \tilde{C}_i \xrightarrow{\partial_i} \tilde{C}_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0 \longrightarrow 0$ комплекс векторных пространств, в котором $\tilde{C}_i = \mathbb{R}^{k_i}$ для всех i, а дифференциалы те же самые (задаются теми же матрицами в стандартных базисах). Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа (кручение), то $H_i(\tilde{C}) = \mathbb{R}^{\beta_i}$.

Задача 4 (двойственность)**.** Пусть $\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — цепной комплекс свободных абелевых групп. Рассмотрим последовательность $\dots \xleftarrow{\partial^*_{i+1}} C^*_i \xleftarrow{\partial^*_i} C^*_{i-1} \xleftarrow{\partial^*_{i-1}} \dots \xleftarrow{\partial^*_1} C^*_0 \longleftarrow 0$, в котором $C^*_i = \mathrm{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$. а) Докажите, что эта последовательность является коцепным комплексом. б) Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа, то $H^i(C^*) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G'_i$, где группа G'_i также конечна. Приведите пример, когда группы G_i и G'_i не совпадают.

Пусть $0 \to A. \xrightarrow{\iota} B. \xrightarrow{p} C. \to 0$ — короткая точная последовательность комплексов.

Задача 5 (теорема Бокштейна)**.** а) Пусть $x \in C_n$ — цикл ($\partial x = 0$), и $y \in B_n$ таково, что $p(y) = x$. Докажите, что существует единственное $z \in A_{n-1}$ такое, что $\iota(z) = \partial y$. б) Докажите, что z — цикл: $\partial z = 0$. в) Докажите, что если $x = 0$, то z — граница: существует $\xi \in A_n$ такое, что $z = \partial\xi$. Выведите отсюда, что если $y' \in B_n$ — другой элемент, для которого $\partial y' = x$, то $z - z' \in A_{n-1}$ — граница: существует $\xi \in A_n$ такое, что $z - z' = \partial\xi$. Тем самым однозначно определен класс гомологий $\beta(x) \in H_{n-1}(A.)$. г) Докажите, что если $x \in C_n$ — граница (существует $\alpha \in C_{n+1}$ такое, что $x = \partial\alpha$), то $\beta(x) = 0$. Выведите отсюда, что β можно рассматривать как гомоморфизм модулей $\beta : H_n(C.) \to H_{n-1}(C.)$. д) Докажите, что последовательность $\dots \to H_n(A.) \xrightarrow{\iota_*} H_n(B.) \xrightarrow{p_*} H_n(C.) \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(A.) \to \dots$ — точная.