3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МАЙЕРА–ВИЕТОРИСА

Пусть $p : \mathbb{R} \to S^1$ — универсальное накрытие над окружностью. Пусть $u : [0,1] \to S^1$ — одномерный сингулярный симплекс (т.е. кривая) на окружности, а $U : [0,1] \to \mathbb{R}$ — его поднятие, т.е. отображение, для которого $p \circ U = u$. Число $\operatorname{ind} u \stackrel{\text{def}}{=} U(1) - U(0) \in \mathbb{R}$ назовем индексом симплекса u; очевидно, оно не зависит от выбора поднятия.

Задача 1. а) Пусть $x = \sum_{i=1}^{N} k_i u_i$ — сингулярная 1-цепь в S^1 с коэффициентами $k_i \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если эта цепь является 1-циклом, то $\operatorname{ind} x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} k_i \operatorname{ind} u_i \in \mathbb{Z}$. б) Докажите, что 1-цикл x является границей тогда и только тогда, когда $\operatorname{ind} x = 0$. Вычислите $H_1(S^1)$.

Задача 2. а) Двумерный тор X это объединение двух цилиндров A и B, пересекающихся по обоим основаниям. Вычислите в данной ситуации последовательность Майера–Виеториса. б) Бутылка Клейна K также получается склеиванием двух цилиндров по основаниям, но одно из оснований приклеивается с перекруткой. Выпишите последовательность Майера–Виеториса и докажите, что $H_2(K) = 0$. Можно ли вычислить $H_1(K)$, исходя из этой последовательности?

Задача 3. Пусть $X = S^3$, $K \subset X$ — гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая (узел), $A \subset X$ — тонкая трубка вокруг K (гомеоморфная полноторию), $B \subset X$ — замыкание $X \setminus A$. Вычислите последовательность Майера–Виеториса для разбиения $X = A \cup B$ в случае, когда а) K — незаузленная окружность; б) K — узел “трилистник”.

Указание. В задаче 3а представьте S^3 как $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, а K — как $\ell \cup \{\infty\}$, где $\ell \subset \mathbb{R}^3$ — прямая.

Задача 4. Пусть X — конечный граф, $A \subset X$ — объединение внутренностей ребер, а $B \subset X$ — объединение малых открытых окрестностей вершин (вершина плюс маленькие отрезки примыкающих к ней ребер, без концов). Выпишите в этой ситуации последовательность Майера–Виеториса и докажите, что сингулярные гомологии графа совпадают с его гомологиями в смысле лекции 1.