4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МАЙЕРА–ВИЕТОРИСА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Задача 1 (сферы с ручками)**.** а) Пусть $\mathbb{T}^2$ — двумерный тор, $B' \subset B \subset \mathbb{T}^2$ — подмножества, причем B' гомеоморфно замкнутому кругу, а B — открытому; $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}^2 \setminus B'$ (“тор с дыркой”). Вычислите последовательность Майера–Виеториса разбиения $\mathbb{T}^2 = A \cup B$. б) Сфера с g ручками X_g является объединением тора с дыркой (собственно, “ручки”) и сферы с $(g-1)$ ручками и дыркой, склеенных по границам дырок. Найдите гомологии X_g с произвольными коэффициентами K. в) Сфера с g ручками X_g это $4g$-угольник, противоположные стороны которого склеены друг с другом “без перекрутки” (уточните, что это значит). Докажите, что это определение гомеоморфно определению из пункта 1в. г) Пусть A — внутренность $4g$-угольника, B — ε-окрестность его границы. Вычислите последовательность Майера–Виеториса разбиения $X_g = A \cup B$. д) Пусть стороны $4g$-угольника склеены попарно (каким-то образом) без перекрутки. Докажите, что полученное пространство гомеоморфно X_m для некоторого $m \le g$. Как вычислить m, если известно разбиение сторон на пары? е) Вычислите в ситуации пункта 1д последовательность Майера–Виеториса из пункта 1г.

Задача 2. а) Пусть $X = \mathbb{R}P^2$, то есть круг, в котором противоположные точки границы (окружности) попарно склеены. Пусть $A \subset X$ — внутренность круга, $B \subset X$ — кольцо шириной $1/2$ вдоль границы круга. Вычислите последовательность Майера–Виеториса разбиения $X_g = A \cup B$ с коэффициентами $K = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и произвольным K. б) Та же задача, если X — бутылка Клейна, т.е. квадрат $[0,1]^2$, в котором отождествляются $(x,0) \sim (1-x,1)$, $(0,y) \sim (1,y)$ для всех $0 \le x,y \le 1$, $A = (0,1)^2 \subset X$, $B = \{(x,y) \in X \mid |x-1/2|, |y-1/2| > 1/2\}$.

Задача 3. а) Пусть A — матрица 2×2 с целыми матричными элементами. Приведите пример отображения $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, для которого матрица отображения $f_* : \mathbb{Z}^2 = H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ равна A. б) Докажите, что для любого такого отображения гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z} = H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ представляет собой умножение на $\det A$.

Замечание. Прежде чем доказывать утверждение пункта 3б, уточните его! Что там со знаком?

Задача 4. а) Пусть $f : S^2 \to \mathbb{T}^2$ — непрерывное отображение. Докажите, что $f_* : K = H_2(S^2, K) \to H_2(\mathbb{T}^2, K) = K$ — нулевое отображение. б) Докажите, что существует отображение $g : \mathbb{T}^2 \to S^2$, для которого $g_* : \mathbb{Z} = H_2(S^2, \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ — изоморфизм. в) Тот же вопрос, но гомоморфизм — умножение на произвольное число $d \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Пусть отображение $f : X_g \to X_h$ таково, что гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z} = H_2(X_g) \to H_2(X_h) = \mathbb{Z}$ ненулевой. Докажите, что $f(X_g) = X_h$.

Задача 6. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — узлы, то есть непрерывные вложения (различные точки переходят в различные), образы которых не пересекаются. Отображение $F_{\gamma_1,\gamma_2} : \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \to S^2$ действует по формуле $F_{\gamma_1,\gamma_2}(u,v) = \frac{\gamma_1(u)-\gamma_2(v)}{|\gamma_1(u)-\gamma_2(v)|}$. Вычислите гомоморфизм $(F_{\gamma_1,\gamma_2})_* : H_2(\mathbb{T}^2) \to H_2(S^2)$, если а) γ_1 — окружность в плоскости xy радиуса 1 с центром в начале координат, γ_2 — окружность радиуса 1 в плоскости yz с центром в точке $(0,3,0)$. б) γ_1 — как в пункте 6а, а γ_2 — окружность радиуса 1 в плоскости yz с центром в точке $(0,1,0)$.