5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И ПЕРВЫЕ ГОМОЛОГИИ

Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, X — линейно связное топологическое пространство, $b \in X$, $\gamma : S^1 \to X$ — петля с началом и концом в точке $b = \gamma(1)$. Обозначим $h[\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ класс гомологий $\gamma_*(e)$, где e — образующая группы $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 1. а) Докажите, что h можно считать гомоморфизмом групп $\pi_1(X, b) \to H_1(X, \mathbb{Z})$. б) Докажите, что коммутаторы $[\alpha, \beta] \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ для всех $\alpha\beta \in \pi_1(X, b)$ принадлежат ядру h.

Коммутантом группы G называется ее подгруппа H, порожденная всеми коммутаторами $[\alpha, \beta]$, где $\alpha, \beta \in G$.

Задача 2. Докажите, что коммутант любой группы — нормальная подгруппа в ней.

Пусть Γ — конечный ориентированный граф, λ — функция из множества ребер Γ в множество $\mathbb{Z}$, меняющая знак при смене ориентации (т.е. каждому ориентированному ребру e сопоставлен целочисленный "вес" $\lambda(e)$, причем $\lambda(-e) = -\lambda(e)$, где $-e$ — то же ребро с противоположной ориентацией). Пусть также $\varphi : \Gamma \to X$ — непрерывное отображение; ему сопоставляется 1-цепь $R(\Gamma, \varphi)$ в X, равная $\sum_e \lambda(e) x_{e,\varphi}$, где сумма берется по всем ребрам e графа Γ, и $x_{e,\varphi}$ — сингулярный 1-симплекс (кривая), полученный ограничением отображения φ на ориентированное ребро e.

Задача 3. а) Докажите, что всякая 1-цепь в X равна $R(\Gamma, \varphi)$ для некоторого графа Γ (и весовой функции λ) и отображения φ. б) При каких условиях на Γ (и λ) цепь $R(\Gamma, \varphi)$ является циклом. в) Докажите, что h (из задачи 1)— эпиморфизм.

Пусть теперь Θ — двумерное клеточное пространство, где для каждой 2-мерной клетки $e_\alpha^{(2)}$ характеристическое отображение является отображением стандартного 2-мерного симплекса (треугольника) $\chi_\alpha^{(2)} : \Delta_2 \to X$ — т.е. сингулярным симплексом, причем ограничение $\chi_\alpha^{(2)}$ на каждую сторону треугольника переводит ее не более чем в одну одномерную клетку (ребро); пусть также λ — функция на множестве 2-мерных клеток с целыми значениями.

Задача 4. а) Для произвольного непрерывного отображения $\varphi : \Theta \to X$ определите 2-цепь $R(\Theta, \varphi) \in C_2(X, \mathbb{Z})$ по образцу графов и докажите, что любая 2-цепь в X есть $R(\Theta, \varphi)$ при некоторых Θ и φ. б) Выразите границу $\partial R(\Theta, \varphi)$ через отображение R для графов, см. задачу 3. в) Докажите, что если $h[\gamma] = 0$, то петля γ является произведением коммутаторов в группе $\pi_1(X, b)$ (т.е. принадлежит ее коммутанту).

Из задач 3в и 4в следует, что $H_1(X, \mathbb{Z})$ изоморфна фактор-группе $\pi_1(X, b)$ по ее коммутанту.

Задача 5. а) Приведите пример группы, состоящей из более чем одного элемента и совпадающей со своим коммутантом. б) Приведите пример линейно связного топологического пространства с нетривиальной π_1 и нулевой H_1.

Пусть X — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой, $b \in X$ — нульмерная клетка, $\iota_k : \mathrm{sk}_k(X) \to X$ — тавтологическое вложение.

Задача 6. а) Докажите, что $(\iota_2)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_2(X), b) \to \pi_1(X, b)$ — изоморфизм. б) Докажите, что $(\iota_1)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b) \to \pi_1(X, b)$ — эпиморфизм. в) Опишите ядро эпиморфизма $(\iota_1)_*$. г) Докажите, что $H_1(X, \mathbb{Z}) = H_1(\mathrm{sk}_2(X), \mathbb{Z})$. д) Докажите (используя клеточный комплекс), что $H_1(X, \mathbb{Z})$ изоморфна фактор-группе $\pi_1(X, b)$ по ее коммутанту.

Указание (к пункту 6в)**.** 1-остов $\mathrm{sk}_1(X)$ — букет окружностей, по одной на каждую одномерную клетку, так что $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b)$ — свободная группа, порожденная одномерными клетками. Неформально говоря, $\mathrm{Ker}(\iota_1)_* \subset \pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b)$ — нормальная подгруппа, порожденная границами двумерных клеток; уточните этот ответ!