6. КЛЕТОЧНЫЙ КОМПЛЕКС

Напомним, что клеточное пространство это множество X, разбитое в объединение непересекающихся множеств (клеток) $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^k$, причем для каждой клетки e_α^k фиксировано *характеристическое отображение* — отображение замкнутого k-мерного шара $\chi_\alpha^k : D^k \to X$ такое, что $\chi_\alpha^k\big|_{\mathrm{Int}(D^k)}$ — взаимно однозначное отображение на e_α^k, а $\chi_\alpha^k(\partial D^k)$ содержится в объединении конечного множества клеток e_β^i с $i < k$. Топология в клеточном пространстве: множество $F \subset X$ считается замкнутым тогда и только тогда, когда замкнуто множество $(\chi_\alpha^k)^{-1}(F) \subset D_k$ для всякого k и всякой k-мерной клетки $e_\alpha^{(k)}$.

$\mathrm{sk}_n X$ (n-ый остов) обозначает объединение всех клеток размерности не выше n.

Пусть e_α^k — k-мерная клетка, а e_β^{k-1} содержится в образе отображения $f_\alpha^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \chi_\alpha^k\big|_{\partial D^k} : S^{k-1} \to \mathrm{sk}_{k-1} X$. Рассмотрим отображение $\pi_\beta : \mathrm{sk}_{k-1}(X) \to S^{k-1}$, получающееся стягиванием в точку всех клеток $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$ (всех размерностей), кроме самой e_β^{k-1}. Степень $[e_\alpha^k : e_\beta^{k-1}]$ отображения $\pi_\beta^{k-1} \circ f_\alpha^k : S^{k-1} \to S^{k-1}$ называется *коэффициентом инцидентности* клеток e_α^k и e_β^{k-1}.

Клеточный комплекс клеточного пространства имеет вид $\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$, где C_k — K-модуль, свободно порожденный множеством k-мерных клеток, а дифференциал ∂_k задается формулой $\partial_k(e_\alpha^k) = \sum_\beta [e_\alpha^k : e_\beta^{k-1}] e_\beta^{k-1}$. Гомологии клеточного комплекса равны сингулярным гомологиям пространства.

В следующей задаче нужно построить клеточное разбиение пространства X, вычислить коэффициенты инцидентности клеток и гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если даны два пространства X и Y и отображение $f : X \to Y$, то нужно еще вычислить гомоморфизм $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ при всех k.

Задача 1. а) X — сфера с g ручками; б) X — бутылка Клейна с g ручками; в) X — проективная плоскость с g ручками; г) X — сфера с g ручками и n дырками; Y — сфера с g ручками, $f : X \to Y$ — вложение. д) $X = S^n$, $Y = \mathbb{R}P^n$, $f : X \to Y$ — стандартное двулистное накрытие. е) $X = S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$, $Y = \mathbb{C}P^n$, $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — обобщенное расслоение Хопфа ($f(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$). ж) $X = S^{2n+1}$ как в пункте 1е; на X действует группа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{\zeta^m \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{2\pi i m/k} \mid m = 0, \dots, k-1\}$ преобразованиями $\zeta^m(z_0, \dots, z_n) = (\zeta^m z_0, \dots, \zeta^m z_n)$; Y — пространство орбит этого действия, $f : X \to Y$ — отображение, переводящее произвольную точку в ее орбиту. з) $X = S^\infty$ — множество бесконечных последовательностей $(x_1, \dots, x_n, \dots)$, члены которых равны нулю, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), и $\sum_{k=1}^\infty x_k^2 = 1$. $Y = \mathbb{C}P^\infty$ (дайте определение!), $f : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ — аналог расслоения Хопфа.

Задача 2. Пусть P, Q — конечные клеточные пространства. Постройте клеточное разбиение $P \times Q$, в котором клетки — попарные произведения клеток P и Q, и докажите, что клеточный комплекс $P \times Q$ для такого разбиения — тензорное произведение клеточных комплексов P и Q.

Задача 3 (формула Кюннета)**.** Пусть $X_\cdot = \dots \to X_n \xrightarrow{\partial n, X} X_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1, X} \dots$ и $Y_\cdot = \dots \to Y_n \xrightarrow{\partial n, Y} Y_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1, Y} \dots$ — комплексы свободных модулей над кольцом K, и $X_\cdot \otimes Y_\cdot = \dots \to X_n \otimes Y_n \xrightarrow{\partial n, X \otimes \partial n, Y} X_{n-1} \otimes Y_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1, X \otimes \partial n-1, Y} \dots$ — их тензорное произведение. а) Докажите, что если K — поле, то $H_*(X \otimes Y, K) = H_*(X, K) \otimes H_*(Y, K)$ (т.е. $H_n(X \otimes Y, K) = \sum_{k=0}^n H_k(X, K) \otimes H_{n-k}(Y, K)$). б) Докажите, что $H_*(X \otimes Y, \mathbb{Z}) = H_*(X, \mathbb{Z}) \otimes H_*(Y, \mathbb{Z}) \oplus G$ для некоторого $\mathbb{Z}$-модуля (т.е. абелевой группы) G, который зависит только от $H_*(X, \mathbb{Z})$ и $H_*(Y, \mathbb{Z})$. Приведите пример, когда модуль G нетривиален.

Задача 4. (Задание, как в задаче 1) а) $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $Y = \mathbb{C}P^2$, $f : X \to Y$ задано формулами $f([x_1 : y_1], [x_2 : y_2]) = [x_1 y_2 + x_2 y_1 : x_1 x_2 : y_1 y_2]$. б) $X = Y = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, $f : X \to Y$ — перестановка сомножителей: $f(a, b) = (b, a)$.