8. КОГОМОЛОГИИ.

Пусть $\iota_n : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^{n+1}$ — вложение, заданное в однородных координатах формулой $\iota_n([z_0 : \dots : z_n]) = [z_0 : \dots : z_n : 0]$. Пусть также $p_n : (\mathbb{C}P^1)^n \to \mathbb{C}P^n$ — отображение факторизации по перестановкам, заданное формулой $p_n([x_0 : y_0], \dots, [x_n : y_n]) = [x_0 \dots x_n : x_0 \dots x_n e_1(y_0/x_0, \dots, y_n/x_n) : \dots : x_0 \dots x_n e_n(y_0/x_0, \dots, y_n/x_n) : x_0 \dots x_n e_{n+1}(y_0/x_0, \dots, y_n/x_n)]$ (так, последняя координата равна $y_0 \dots y_n$).

Задача 1. а) Постройте клеточное разбиение и вычислите алгебру когомологий $H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$. б) Постройте клеточное разбиение $\mathbb{C}P^n$, для которой $\mathrm{sk}_{2n-2} = \iota_{n-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$. Вычислите $H^*(\mathbb{C}P^n)$. в) Вычислите гомоморфизм $\iota_n^* : H^*(\mathbb{C}P^{n+1}) \to H^*(\mathbb{C}P^n)$. г) На $(\mathbb{C}P^1)^n$ действует перестановками сомножителей группа перестановок Σ_n. Докажите, что для всякой точки $u \in \mathbb{C}P^n$ прообраз $p_n^{-1}(u) \subset (\mathbb{C}P^1)^n$ — орбита этого действия. д) Вычислите гомоморфизм $p_n^*(H^{2n}(\mathbb{C}P^n)) \to H^{2n}((\mathbb{C}P^1)^n)$. е) Вычислите умножение в когомологиях $H^*(\mathbb{C}P^2)$, используя результаты задач 1а, 1д и тот факт, что p_2^* — гомоморфизм алгебр. ж) Вычислите умножение в $H^*(\mathbb{C}P^n)$.

Пусть теперь $\iota_n : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^{n+1}$ — отображение, задаваемое той же формулой, что в комплексном случае.

Задача 2. а) Постройте клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$, для которого $\mathrm{sk}_{n-1} = \iota_{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1})$, и вычислите модули когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n, K)$ при $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. б) Найдите клеточное отображение, гомотопное диагональному вложению $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ и вычислите умнож ение в $H^*(\mathbb{R}P^2, K)$ при $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Также вычислите алгебру когомологий $H^*((\mathbb{R}P^2)^n)$ для произвольного n. в) На пространстве $(\mathbb{R}P^2)^n$ действует перестановками сомножителей группа Σ_n. Постройте гладкое отображение $q_n : (\mathbb{R}P^2)^n \to \mathbb{R}P^{2n}$ такое, что для всякого $u \in \mathbb{R}P^{2n}$ прообраз $q_n^{-1}(u) \subset (\mathbb{R}P^2)^n$ — орбита этого действия. г) Вычислите алгебру когомологий $H^*(\mathbb{R}P^4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, используя результаты задач 2а, 2б и тот факт, что q_2^* — гомоморфизм $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-алгебр. д) Вычислите алгебру когомологий $H^*(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ для произвольного n. е) Тот же вопрос, $H^*(\mathbb{R}P^{2n+1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. ж) Вычислите алгебру когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$ для произвольного n.