Семинар 11. (Би)линейные формы

Задача 11.1. Вычислите двойственный базис к базису из векторов:
(а) $[(0,1,5),(2,0,0),(0,0,-1)]$ **(б)** $[(a,b),(c,d)]$.

Задача 11.2. Подобрав подходящий двойственный базис, докажите, что следующий набор функционалов $\{\psi_i | i = 0\dots n\}$ на многочленах степени меньшей n над полем $\mathbb{R}$ образует базис:
(а) $\psi_i(f) := f(\alpha_i)$, точки $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ – различные; **(б)** $\psi_i(f) := \frac{\mathsf{d}^i f}{\mathsf{d}x^i}\Big|_{x=a}$;
(в) для заданного набора различных вещественных чисел $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ и набора целых неотрицательных чисел $(m_1,\dots,m_k)$, такого что $\sum m_i = n$ положим $\psi_{m_1+\dots+m_{s-1}+i}(f) := \frac{\mathsf{d}^i f}{\mathsf{d}x^i}\Big|_{x=\alpha_s}$, при условии $0 \leqslant i < m_s$.

Задача 11.3. Докажите, что билинейная форма симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда когда матрица формы симметрична (кососимметрична в любом базисе). Чему равна размерность пространства симметрических (кососимметрических) билинейных форм?

Задача 11.4. Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$.
(а) Определим форму $B(X,Y) = Tr(X \circ Y)$ на пространстве $End(V)$. Докажите, что она симметрическая. Вырождена ли эта форма? Запишите матрицу этой формы в подходящем базисе и найдите ортогональный базис при $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Существует ли ортогональный базис в характеристике 2? **(б)** Определим форму $B((v,\varphi)),(w,\psi)) = \psi(v) - \varphi(w)$ на пространстве $V \oplus V^*$. Докажите, что она кососимметрическая. Вырождена ли эта форма? Запишите матрицу этой формы в подходящем базисе и найдите симплектический базис.
(в) Определим форму $B((v,\varphi)),(w,\psi)) = \psi(v) + \varphi(w)$ на пространстве $V \oplus V^*$. Докажите, что она симметрическая. Вырождена ли эта форма? Запишите матрицу этой формы в подходящем базисе.

Задача 11.5. Пусть B – билинейная форма на произвольном векторном пространстве V. Докажите, что отображения $B \to B(\cdot, v)$ и $B \to B(v,\cdot)$ задают изоморфизм между пространством билинейных форм и $\operatorname{Hom}(V,V^*)$.

Задача 11.6. Пусть B – симметрическая билинейная форма, $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.
(а) Верно ли, что любой вектор $v \neq 0$ может быть включен в некоторый ортогональный базис?
(б) Докажите, что любой ортогональный базис подпространства, ограничение формы на которое невырождено, может быть дополнен до ортогонального базиса всего пространства.
(в) Докажите, что если форма невырожденная, то размерность изотропного пространства (т.е. такого, что ограничение на него нулевое) не превосходит $\frac{1}{2}\dim V$. Приведите пример когда эта размерность достигается.

Задача 11.7. Пусть $B : V \times V \to \Bbbk$ невырожденная симметрическая билинейная форма на векторном пространстве V размерности n.
(а) Покажите, что изометрии пространства V образуют группу. Изометрией называется линейный оператор $A : V \to V$, сохраняющий $B(,)$. То есть, для всех $v, w \in V$ выполнено $B(v,w) = B(Av, Aw)$. **(б)** Свяжем с вектором v, таким что $B(v,v) \neq 0$ отражение $\sigma_v(x) = x - 2\dfrac{B(x,v)}{B(v,v)}v$. Докажите, что σ_v – изометрия.
(в) Докажите, что всякая изометрия является композицией не более чем $2n$ отражений.

Задача 11.8. Докажите, что предложенные формы $B(,)$ являются евклидовым скалярным произведением на пространстве вещественнозначных многочленов $\mathbb{R}[x]$, и подберите подходящее семейство многочленов из списка, показав, что они являются результатом ортогонализации стандартного базиса $\{x^n\}$ по отношению к этим скалярным произведениям.
(а) $B(f,g) := \int_{-1}^{1} \dfrac{f(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **(б)** $B(f,g) := \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$;
(в) $B(f,g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$; **(г)** $B(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
Многочлены Лагера $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$; Эрмита $E_n(x) = e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$;
Лежандра $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$; Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.