Семинар 3. Снова о кольцах, полях и абелевых группах.

Задача 3.1. Докажите следующие равносильности в евклидовом кольце R с нормой $N : R \setminus 0 \to \mathbb{N}$

(а) $N(a) = N(ab) \Leftrightarrow b$ – обратим;[1]

(б) $R/(b)$ – поле $\Leftrightarrow b$ – неразложим.

Задача 3.2. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ – пара вложенных полей. Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{F}$ и рассмотрим гомоморфизм колец $ev_\alpha : \Bbbk[x] \xrightarrow{f \mapsto f(\alpha)} \mathbb{F}$ и обозначим за $\Bbbk[\alpha]$ минимальное подкольцо в $\mathbb{F}$, содержащее $\Bbbk$ и α, соответственно за $\Bbbk(\alpha)$ – минимальное подполе. Покажите, что

(а) $\Bbbk[\alpha]$ совпадает с образом гомоморфизма ev_α;

(б) если ядро $\ker(ev_\alpha)$ гомоморфизма ev_α отлично от 0, то $\Bbbk[\alpha]$ и $\Bbbk(\alpha)$ совпадают и изоморфны $\Bbbk[x]/(\mu_\alpha(x))$ для некоторого неприводимого многочлена $\mu_\alpha(x) \in \Bbbk[x]$,

(в) если же $\ker(ev_\alpha) = 0$, то имеет место изоморфизм поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ и $\Bbbk(\alpha)$.

Задача 3.3. Опишите количество элементов порядка d и количество циклических подгрупп порядка d в **(а)** циклической группе C_n порядка n, **(б)** декартовом произведении двух циклических групп $C_n \times C_n$ **(в)*** декартовом произведении $\underbrace{C_n \times \ldots \times C_n}_{k}$.

Задача 3.4. Найдите неприводимый многочлен $f(x)$ степени n над полем $\mathbb{F}_p$. Реализуйте поле $\mathbb{F}_q$ из $q = p^n$ элементов, как кольцо вычетов $\mathbb{F}_p[x]/f(x)$ и опишите в нем множество образующих мультипликативной группы для **(а)** $p = 2$, $n = 2, 3, 4$; **(б)** $p = 3$, $n = 2$.

(в) Верно ли, что если $\mathbb{F}_q \simeq \mathbb{F}_p[\alpha]/(f(\alpha))$ то α – образующая мультипликативной группы $\mathbb{F}_q^*$.

Задача 3.5. Опишите конечные мультипликативные подгруппы в полях:

(а) $\mathbb{Q}$, **(б)** $\mathbb{R}$, **(в)** $\mathbb{C}$, **(г)*** $\mathbb{Q}[i]$, **(д)** $\mathbb{F}_p(x)$.

Задача 3.6. Пусть S мультипликативное подмножество кольца R без делителей нуля.

(а) Докажите, что любой идеал в кольце частных $S^{-1}R$ порождается своим пересечением с R

(б)* Постройте биекцию между простыми идеалами в $S^{-1}R$ и простыми идеалами в R, которые не пересекаются с S.

(в) Покажите, что кольцо частных кольца главных идеалов будет полем или кольцом главных идеалов. В частности, будет выполнена факториальность (однозначность разложения на простые множители).

(г) Опишите простые элементы в кольцах частных кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по мультипликативным подмножествам $S_1(n) := \{n^k | k \geqslant 0\}$ и $S_2(n) := \{m \in \mathbb{Z} | (m, n) = 1\}$.

Задача 3.7.

(а) Воспользовавшись китайской теоремой об остатках покажите, что любая рациональная функция $\frac{f(x)}{g(x)} \in \Bbbk(x)$ может быть записана (единственным образом) в виде конечной суммы элементарных дробей $\sum_{k,s} \frac{a_{ks}}{p_s(x)^k}$, где $p_s(x)$ – пробегает множество неприводимых делителей многочлена $g(x)$.

(б) Напишите разложение в степенной ряд элементарной дроби $\frac{1}{(x-\alpha)^k}$ и попытайтесь дать общий вид коэффициента разложения рациональной функции $\frac{f(x)}{g(x)}$, если известно, что знаменатель $g(x)$ раскладывается на линейные множители, как происходит, например, для многочленов с коэффициентами из поля комплексных чисел.

---

[1] *Указание:* разделите a на ab с остатком.