Семинар 4. Векторные пространства, СЛУ и Метод Гаусса.

Задача 4.1. Верно ли, что корни многочлена $f(x)$ над конечным полем $\mathbb{F}_{p^n}$ характеристики p образуют $\mathbb{F}_p$-векторное подпространство в $\mathbb{F}$: **(а)** $f(x) = x^p - x$, **(б)** $f(x) = x^{2p} - x$, **(в)** $f(x) = x^p + 2x$, **(г)** $f(x) = x^{p^2} - x^p$, **(д)** $f(x) = x^{p^n} - x$.

Задача 4.2. Решите систему линейных уравнений над полем $\mathbb{F}_2$

(а) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$; **(б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_1 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_5 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

(в) Сколько решений имеет каждая из систем над полями $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$?

Задача 4.3. Верно ли, что тройка чисел **(а)** α^2, α^3, α^4 **(б)** α^9, α^{14}, α^{25} образует базис в поле $\mathbb{F}_8 := \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^3 + \alpha + 1)$, рассматриваемом, как векторное пространство над $\mathbb{F}_2$.

Задача 4.4. Для вложения полей $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ назовем *степенью расширения* $\mathbb{F}/\Bbbk$ число $\dim_{\Bbbk} \mathbb{F}$ (обозначение $[\mathbb{F} : \Bbbk]$). В случае, когда $[\mathbb{F} : \Bbbk] < \infty$ мы говорим, что $\mathbb{F}$ является конечным расширением поля $\Bbbk$. Докажите, что

(а) для цепочки вложенных полей $\Bbbk \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ имеет место равенство $[\mathbb{L} : \mathbb{F}][\mathbb{F} : \Bbbk] = [\mathbb{L} : \Bbbk]$, в случае, если участвующие расширения конечны.

(б)* Если $[\mathbb{F} : \Bbbk]$ – простое число, то $\forall \alpha \in \mathbb{F} \setminus \Bbbk$ имеем $\Bbbk[\alpha] = \mathbb{F}$ и α является корнем неприводимого над $\Bbbk$ многочлена степени $[\mathbb{F} : \Bbbk]$.

Задача 4.5. Найдите базис суммы и пересечения линейных оболочек наборов векторов

(а) $[(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)]$ и $[(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)]$

(б) $[(1, 1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1)]$ и $[(1, 0, 1, 0, 1), (0, 2, 1, 1, 0), (1, 2, 1, 2, -1), (1, 1, 1, 1, 0)]$.

Задача 4.6. Пусть G – абелева группа, каждый элемент которой имеет порядок p, где p – простое число.

(а) Постройте на G структура векторного пространства над $\mathbb{F}_p$ и докажите, что порядок G равен p^n для подходящего n.

(б) Докажите, что подгруппы в G являются $\mathbb{F}_p$-векторными подпространствами.

(в) Постройте биекцию между множеством подгрупп индекса p и множеством однородных линейных уравнений над $\mathbb{F}_p$ от n переменных с точностью до умножения на ненулевую константу.

(г) Вычислите количество подгрупп индекса p.

(д) Вычислите количество циклических погрупп в группе G.

Задача 4.7. Пусть V_1, V_2, V_3 подпространства конечномерного простанства W. Верно ли, что

(а) если $\dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 1$, то сумма $V_1 + V_2$ равна одному из этих подпространств, а пересечение $V_1 \cap V_2$ – другому;

(б) $\dim(V_1) + \dim(V_2) > \dim W \;\Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 \geqslant 1$;

(в) $V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3$;

(г) $(V_1 + V_2) \cap (V_2 + V_3) \cap (V_3 + V_1) = (V_1 + V_2) \cap V_3 + (V_2 + V_3) \cap V_1$.

Задача 4.8. Пусть V – векторное пространство размерности N над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Вычислите

(а) количество ненулевых векторов в V;

(б) количество прямых в V;

(в) количество пар линейно-независимых векторов в V;

(г) количество упорядоченных наборов из n линейно-независимых векторов в V, обозначим это множество за $L(n, N)$.

(д) Докажите, что число $\#L(n, N)$ делиться на $n!$.

(е)* Вычислите количество n-мерных подпространств в $\mathbb{F}_q^N$.