

## Семинар 6. Действие группы на множестве

**Задача 6.1.** Дайте определение группы симметрий  $Iso(S)$  и группы вращений  $Iso^+(S)$  геометрической фигуры  $S \subset \mathbb{R}^3$  и докажите, что

(а) если группа  $Iso(S)$  конечна, то порядки  $Iso(S)$  и  $Iso^+(S)$  или совпадают или отличаются в 2 раза. (б) группа симметрий (вращений) правильного многогранника – конечна.

**Задача 6.2.** Назовем  $n$ -мерным кубом  $I^n$  множество точек  $\{(x_1, \dots, x_n) \mid -1 \leq x_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ . Вычислите (а) количество граней  $I^n$ ; (б) порядок группы  $G_n$  движений  $I^n$  и её подгруппы собственных движений  $G_n^+$ . Движением называется отображение  $\mathbb{R}^n$  в себя сохраняющее расстояние. Кстати, покажите, что линейный изоморфизм  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , сохраняющее на месте куб, является движением (то есть сохраняет расстояние между точками).

### Задача 6.3.

(а) Покажите, что с каждой парой подгрупп  $H, K \subset G$  можно связать отношение эквивалентности на группе:  $a \sim b \Leftrightarrow \exists h \in H, k \in K: a = hbk$ . Множество двойных смежных классов  $H \backslash G / K$  называется множеством классов эквивалентности относительно введенного отношения. Постройте биекцию между множествами  $H$ -орбит на  $G/K$ ,  $K$ -орбит на  $H \backslash G$  и множеством двойных смежных классов  $H \backslash G / K$ .

(б) Группа перестановок  $S_n$  действует на множестве  $\{1, \dots, n\}$  а значит и на множестве его  $k$ -элементных подмножеств. Покажите, что это действие транзитивно и опишите стабилизатор  $G_k$  заданного  $k$ -элемента подмножества. Вычислите количество двойных смежных классов  $G_k \backslash S_n / G_m$ .

(в) Множество цепочек вложенных подпространств  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n$  размерностей  $k_1, \dots, k_r$  называется пространством флагов  $Fl(k_1, k_2, \dots, k_r)$ . Опишите орбиты естественного действия группы  $GL_n(\mathbb{K})$  на пространстве флагов. С каждой парой флагов  $V_1 \subset \dots \subset V_r$  и  $W_1 \subset \dots \subset W_s$  можно связать матрицу целых чисел  $\{d_{ij} := \dim V_i \cap W_j\}$ . Какие-то ограничения на числа  $d_{ij}$  вы можете придумать, если размерности флагов  $\{V_i\}$  и  $\{W_j\}$  заданы? Постройте биекцию между множеством возможных матриц  $d_{ij}$  и множеством двойных смежных классов  $B_{(k_1, \dots, k_r)} \backslash GL_n / B_{(l_1, \dots, l_s)}$ , где  $B_{(k_1, \dots, k_r)} \subset GL_n$  – стабилизатор заданного флага  $(V_1 \subset V_r) \in Fl(k_1, \dots, k_r)$ , а множеством двойных смежных кла

**Задача 6.4.** Группой проективных преобразований  $PGL_n(\mathbb{F})$  называется факторгруппа всех обратимых линейных преобразований по подгруппе скалярных матриц. Покажите, что группа  $PGL_n(\mathbb{F})$  действует на проективном пространстве  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^{n-1}$  (множестве прямых в  $\mathbb{F}^n$ , проходящих через 0).

Построив подходящее транзитивное действие группы проективных/линейных преобразований, предъявите изоморфизмы групп (а)  $GL_2(\mathbb{F}_2) = S_3$ ; (б)  $PGL_2(\mathbb{F}_3) = S_4$ ; (в)  $PGL_2(\mathbb{F}_4) = A_5$ .

**Задача 6.5.** Пользуясь действием группы  $PGL_2(\mathbb{F}_5)$

(а) на проективной прямой  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_5}^1$ , вложите  $PGL_2(\mathbb{F}_5)$  в  $S_6$ ;

(б) на однородном пространстве  $S_6/PGL_2(\mathbb{F}_5)$ , построьте изоморфизм групп  $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ .

(в) Постройте автоморфизм группы  $S_6$ , переводящий стандартную подгруппу  $S_5 \subset S_6$  в  $PGL_2(\mathbb{F}_5) \subset S_6$ , что он делает с классами сопряженности в  $S_6$ .

**Задача 6.6.** Опишите классы сопряженности в группах

(а) диэдра  $D_n$  – симметрий правильного  $n$ -угольника;

(б) группе  $Heis_p := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL_3(\mathbb{F}_p)$  – верхнетреугольных матриц порядка 3 над  $\mathbb{F}_p$  с единицами на диагонали.

**Задача 6.7.** Пусть перестановка  $\sigma \in S_n$  разложена в произведение  $l$  независимых циклов длин  $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_l$ . Выпишите формулу для (а) знака, (б) порядка перестановки  $\sigma$ , (в) порядка класса сопряженности  $\sigma$ , (г) количества перестановок, коммутирующих с  $\sigma$ .