Семинар 7. Нормальные подгруппы, факторгруппы

Задача 7.1. Пусть H – подгруппа индекса p в конечной группе G порядка n. Постройте гомоморфизм $\varphi : G \to \mathbb{S}_p$ и докажите, что

(а) если p – минимальный простой делитель числа n, то H – нормальна.

(б) если H – нормальна, то $g^p \in H$ для $g \in G$.

Задача 7.2. Может ли быть циклической

(а) факторгруппа некоммутативной группы по своему центру;

(б) группа автоморфизмов неабелевой группы.

Центром $Z(G)$ группы G называется совокупность всех элементов группы G, которые коммутируют с любым другим элементом группы.

Задача 7.3. Докажите, что следующие подгруппы группы G нормальны:

(а) подгруппа содержащая коммутант группы G;

(б) коммутант нормальной подгруппы.

Коммутантом G' группы G называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами, то есть элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$.

Задача 7.4. Пусть a, b – пара элементов свободной группы F. Докажите импликации

(а) $a^n = b^n \Rightarrow a = b$,

(б) $a^n b^m = b^m a^n$ для $mn \neq 1 \Rightarrow ab = ba$,

(в) уравнение $x^n = a$ имеет решение $\forall n \Rightarrow a = e$.

Задача 7.5. Постройте отображение из группы Гейзенберга

$$Heis_p := \langle x, y, k | x^p = y^p = k^p = e,\ xy = kyx,\ xk = kx,\ yk = ky \rangle$$

в группу обратимых верхнетреугольных матриц порядка 3 над полем $\mathbb{F}_p$ и докажите, что её порядок равен p^3.

Задача 7.6. Вычислите количество элементов в

(а) группе обобщенных кватернионов $Q_n := \langle a, b | a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = a^{2^{n-2}}, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$;[1]

(б) дициклической группе $Dic_n := \langle x, y | x^{2n} = 1, y^2 = x^2, yx = x^{-1}y \rangle$.

Задача 7.7. Полупрямым произведением $H \ltimes_\varphi K$ групп H и K посредством отображения φ из группы H в группу автоморфизмов $Aut(K)$ называется множество пар $\{(h, k) | h \in H, k \in K\}$ со следующим групповым законом умножения: $(k_1, h_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 h_2, \varphi_{h_2}(k_1) k_2)$.

(а) Проверьте, что определение корректно, покажите, что $K \simeq (e, K)$ нормальная подгруппа в $H \ltimes_\varphi K$, фактор по которой изоморфен H;

(б) Покажите, что если в группе G выбрана нормальная подгруппа $K \lhd G$ и какая-то подгруппа $H \subset G$, изоморфная G/K, так что сквозной гомоморфизм $H \to G/K \to H$ – тождественный, то группа G изоморфна полупрямому произведению $H \ltimes_\varphi K$.

Задача 7.8. Постройте изоморфизм между группой G и полупрямым произведением групп H и K:

(а) $G = \mathbb{S}_n$, $H = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, $K = A_n$;

(б) G – группа $Aff^1(\mathbb{F}_q)$ аффинных преобразований прямой над $\mathbb{F}_q$, $H = \mathbb{F}_q^*$, $K = (\mathbb{F}_q, +)$;

(в) G группа Гейзенберга $Heis_p$ из **Задачи 6.5**, $H = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$, $K = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$.

Задача 7.9*. Докажите, что группа перестановок $\mathbb{S}_n$ может быть задана следующим образом:

$$\left\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \middle| s_i^2 = 1,\ \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i, \text{ если } |i - j| > 1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{matrix} \right\rangle$$

Где s_i соответствует последовательной транспозиции $(i, i+1) \in \mathbb{S}_n$.

[1] *Указание:* покажите, что центр Q_n содержит центральную подгруппу порядка 2, и опишите факторгруппу Q_n по этой подгруппе.