

Семинар 9. Композиционный ряд, Разрешимые группы

Задача 9.1. Приведите пример

- (а) группы с двумя композиционными рядами, факторы которых нетривиально переставлены друг относительно друга;
- (б) двух неизоморфных групп с одинаковыми композиционными факторами Жордана-Гёльдера;
- (в) бесконечной группы, у которой есть конечный композиционный ряд;
- (г) бесконечной группы, для которой не существует конечного композиционного ряда.

Задача 9.2. Выведите основную теорему арифметики из теоремы Жордана-Гёльдера.

Задача 9.3. Опишите какой-нибудь композиционный ряд дициклической группы DC_{10} .

Задача 9.4. Пусть G разрешима, H – собственная подгруппа наименьшего индекса. Докажите, что H нормальна в G .

Задача 9.5. Пользуясь теоремами Силова, докажите, что для различных простых чисел p , q и r все группы порядков (а) pq , (б) p^2q , (в) pqr разрешимы.

Задача 9.6. (а) Перечислите все группы порядка не больше 15 с точностью до изоморфизма;

- (б) Докажите, что группы порядка < 60 разрешимы;
- (в) Докажите, что простая группа порядка 60 изоморфна A_5 ;
- (г)* Докажите, что любая неабелева группа порядка $61 \leq n < 168$ – не проста.

Задача 9.7. Покажите, что

- (а) группа A_n проста при $n \geq 5$;
- (б) S_n неразрешима, $n \geq 5$;
- (в) любая собственная подгруппа A_n имеет индекс не менее n ;
- (г) Если простая неабелева группа имеет подгруппу индекса n , то она изоморфна подгруппе в A_n .