Семинар 12. Определители

Задача 12.1.

(а) Пусть $A = (a_{ij})$ – целочисленная $m \times n$-матрица, а $[A]_p = ([a_{ij}]_p) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{F}_p)$ её редукция по простому модулю p. Докажите, что $\mathsf{rk}_{\mathbb{Q}}(A) \geqslant \mathsf{rk}_{\mathbb{F}_p}([A]_p)$, где $\mathsf{rk}_{\mathbb{Q}}(A)$ – размерность $\mathbb{Q}$-линейной оболочки строк/столбцов матрицы, соответственно, $\mathsf{rk}_{\mathbb{F}_p}([A]_p)$ – ранг матрицы $[A]_p$ над $\mathbb{F}_p$.

(б) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Докажите, что все коровы весят одинаково.

Задача 12.2. *(Соотношения Плюккера)* Докажите, что миноры $W_{ij} := \det\left(\begin{smallmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j}\end{smallmatrix}\right)$ комплексной 2×4 матрицы (a_{st}) удовлетворяют следующему тождеству Плюккера: $W_{12}W_{34} - W_{13}W_{24} + W_{14}W_{23} = 0$.

Задача 12.3. Пусть $T : M_n(\Bbbk) \to M_n(\Bbbk)$ – линейный оператор на пространстве матриц такой, что $\det A = \det T(A)$ для любой $A \in M_n(\Bbbk)$.

(а) Докажите, что T – обратимый линейный оператор.

(б) Докажите, что $\mathsf{rk}A = \mathsf{rk}T(A)$ для любой матрицы $A \in M_n(\Bbbk)$.

Задача 12.4. **(а)** набор вещественнозначных функций $f_1(t), \dots, f_n(t)$ от одной переменной линейно независим над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существует набор точек $a_1, \dots, a_n$, такой что $\det \|f_i(a_j)\| \neq 0$.

(б) Вронскианом $W(f_1, \dots, f_n)(t)$ набора из $n-1$ раз дифференцируемых функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется определитель матрицы производных $\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n)}(t)\end{pmatrix}$. Докажите, что если хотя бы в одной точке $W(f_1, \dots, f_n)(t) \neq 0$, то набор функций $f_1, \dots, f_n$ линейно независим.

(в) Докажите, что набор функций $e^{\lambda_i t}, i = 1, \dots, n, \lambda_i \neq \lambda_j$ линейно независим.

Задача 12.5. Докажите, что **(а)** определитель матрицы Грама $\det((v_i, v_j))$ в евклидовом пространстве – неотрицателен и равен 0 тогда и только тогда, когда набор векторов $v_1, \dots, v_n$ линейно зависим;

(б) $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2$;

(в) $(\int_a^b f^2(x)dx)(\int_a^b g^2(x)dx) \geqslant (\int_a^b f(x)g(x)dx)^2$ для любых непрерывных функций.

Задача 12.6. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

(а) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$?

(б) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$?

(в) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$?

Если да, то какая у неё может быть сигнатура?

Задача 12.7. Данную задачу очень полезно продумать наглядно по принципу $1, 2$, много. То есть, продумайте геометрический смысл всех пунктов данной задачи для двумерного и трехмерного объемлющего пространств.

(а) Докажите, что квадрат объема параллелепипеда, натянутого на вектора $v_1, \dots, v_k$ евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ равен определителю $k \times k$-матрицы грамма $((v_i, v_j))$.

(б) Выразите ортогональную проекцию вектора v на плоскость заданную векторами $v_1, \dots, v_k$;

(в) Выразите расстояние от точки до плоскости заданной точкой и набором линейно-независимых векторов, коллинеарных данной плоскости, называемых направляющими векторами плоскости.

(г) Докажите, что к двум непересекающимся аффинным плоскостям в $\mathbb{R}^{m+k+1}$ размерностей m и k соответственно можно провести совместный перпендикуляр,

(д) докажите, что он единственный, если плоскости не имеют параллельных векторов и выразите длину перпрендикуляра через скалярные произведения и определители (плоскости заданы точкой и набором направляющих векторов).

Задача 12.8. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и в нем k-мерная плоскоть l. Пусть Γ – решетка (абелева группа) целочисленных векторов в $\mathbb{R}^n$ и $\Gamma_l := \Gamma \cap l$. Верно ли, что набор целочисленных векторов $f_1, \dots, f_k \subset l$ образует базис в решетке

(а) Γ если и только если $k = n$ и объём параллелепипеда натянутого на вектора $f_1, \dots, f_n$ равен 1;

(б) Γ_l если и только если объём параллелепипеда натянутого на вектора $f_1, \dots, f_k$ равен 1;

(в)* Γ_l если и только если существует набор дополнительных векторов $f_{k+1}, \dots, f_n$, такой что объём параллелепипеда натянутого на вектора $f_1, \dots, f_n$ равен 1.

Задача 12.9. Найдите наибольший порядок элемента в группе $GL_n(\mathbb{F}_p)$, где p – простое.

Семинар 13. (*Дополнительный*) Критерий Ивасавы

Задача 13.1. Пусть группа G действует 2-транзитивно на множестве X. Докажите, что стабилизатор любой точки – максимальная по включению подгруппа G.

Задача 13.2. Пусть группа G действует 2-транзитивно на множестве X. Докажите, что любая нормальная подгруппа G действует на X либо тривиально, либо транзитивно.

Задача 13.3. (Критерий Ивасавы) Пусть группа G действует 2-транзитивно на множестве X, K – ядро действия. При этом для некоторого $x \in X$ стаблизатор содержит нормальную абелеву подгруппу N, так что gNg^{-1} порождают G и $[G, G] = G$. Тогда G/K – простая группа.

Задача 13.4. Группа $PSL_n(\mathbb{F})$ является факторгруппой группы $SL_n(\mathbb{F})$ обратимых линейных преобразований с определителем 1 по подгруппе скалярных матриц $\{\lambda E | \lambda \in \mathbb{F} \colon \lambda^n = 1\}$.

(а) Постройте естественное действие групп $SL_n(\mathbb{F})$ и $PSL_n(\mathbb{F})$ на $(n-1)$-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}}$.

(б) Докажите, что группа $PSL_2(\Bbbk)$, $|\Bbbk| \geqslant 4$ проста.

(в) Докажите, что группа $PSL_n(\Bbbk)$ проста для $n > 2$.

Задача 13.5. Докажите, что группа $A_n, n > 5$ проста, построив подходящее 2-транзитивное действие на подходящем множестве.