Семинар 8. Подсчеты орбит и теоремы Силова

Задача 8.1. Обозначим за $P(d,n)$ количество различных ожерелий из d бусин, покрашенных в n цветов.

(а) Воспользуйтесь формулой Бернсайда и вычислите $P(6,n)$, как функцию от n;

(б) Докажите, что для фиксированного d число $P(d,n)$ является многочленом по n. Можете ли вы его вычислить?

(в) Верно ли, что количество способов раскрасить вершины заданного графа в n разных цветов является многочленом от n.

Задача 8.2. Докажите, что центр p-группы (то есть группы порядка p^n, где p – простое) нетривиален.

Задача 8.3. Пусть G – p-подгруппа в $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Докажите, что найдется ненулевой вектор $v \in \mathbb{F}_p^n$ неподвижный (=инвариантный) относительно всей группы G.

Задача 8.4. Укажите какую-нибудь силовскую p-подгруппу и вычислите количество силовских p-подгрупп в группах **(а)** S_p; **(б)*** S_{p^2}; **(в)** $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Задача 8.5. Пусть $\pi : G \twoheadrightarrow H$ – сюрьективный гомоморфизм конечных групп. Докажите, что $\forall p$ делящего порядок группы G количество силовских p-подгрупп в группе H не превосходит количества силовских p-подгрупп в группе G.

Проиллюстрируйте ваше доказательство на примере силовских 2-подгрупп и проекции $\mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$.

Задача 8.6. Покажите, что группа порядка 1001 **(а)** абелева, **(б)** циклическая, а значит единственная.

Задача 8.7. Пусть G – группа порядка pq (где $p < q$ – пара простых чисел). Покажите, что

(а) G – абелева, если $(q-1) \not\vdots\, p$;

(б) G изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \ltimes_\varphi \mathbb{Z}/(q\mathbb{Z})$ для подходящего автоморфизма $\varphi : \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \to Aut(\mathbb{Z}/(q\mathbb{Z}))$, если $(q-1) \vdots\, p$.

Семинар 8. Подсчеты орбит и теоремы Силова

Задача 8.1. Обозначим за $P(d,n)$ количество различных ожерелий из d бусин, покрашенных в n цветов.

(а) Воспользуйтесь формулой Бернсайда и вычислите $P(6,n)$, как функцию от n;

(б) Докажите, что для фиксированного d число $P(d,n)$ является многочленом по n. Можете ли вы его вычислить?

(в) Верно ли, что количество способов раскрасить вершины заданного графа в n разных цветов является многочленом от n.

Задача 8.2. Докажите, что центр p-группы (то есть группы порядка p^n, где p – простое) нетривиален.

Задача 8.3. Пусть G – p-подгруппа в $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Докажите, что найдется ненулевой вектор $v \in \mathbb{F}_p^n$ неподвижный (=инвариантный) относительно всей группы G.

Задача 8.4. Укажите какую-нибудь силовскую p-подгруппу и вычислите количество силовских p-подгрупп в группах **(а)** S_p; **(б)*** S_{p^2}; **(в)** $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Задача 8.5. Пусть $\pi : G \twoheadrightarrow H$ – сюрьективный гомоморфизм конечных групп. Докажите, что $\forall p$ делящего порядок группы G количество силовских p-подгрупп в группе H не превосходит количества силовских p-подгрупп в группе G.

Проиллюстрируйте ваше доказательство на примере силовских 2-подгрупп и проекции $\mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$.

Задача 8.6. Покажите, что группа порядка 1001 **(а)** абелева, **(б)** циклическая, а значит единственная.

Задача 8.7. Пусть G – группа порядка pq (где $p < q$ – пара простых чисел). Покажите, что

(а) G – абелева, если $(q-1) \not\vdots\, p$;

(б) G изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \ltimes_\varphi \mathbb{Z}/(q\mathbb{Z})$ для подходящего автоморфизма $\varphi : \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \to Aut(\mathbb{Z}/(q\mathbb{Z}))$, если $(q-1) \vdots\, p$.