Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2019

1

1.1. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная категория. Сопоставим каждому объекту $X \in\in \mathcal{C}$ группу $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Определяет ли это сопоставление функтор $\mathcal{C} \to\to \mathcal{GRP}$?

1.2. (Задача скорее по общей топологии, чем по алгебре). Пусть $X, Y \in\in \mathcal{TOP}$. Проверьте, что *компактно-открытая топология* позволяет считать, что $Y^X \in\in \mathcal{TOP}$. Убедитесь, что при фиксированном каждом из аргументов X, Y сопоставление $(X, Y) \mapsto\mapsto Y^X$ определяет *эндофунктор* $\mathcal{TOP} \to\to \mathcal{TOP}$.

1.3. Мощность множества $\mathrm{Sub}(\mathbb{R})$ называется *гиперконтинуумом.* Пусть X, Y, Z – три множества мощности континуум. (а) Докажите, что множество Y^X гиперконтинуально. (б) Определите мощность множества $\left(Z^Y\right)^X$.

1.4. Обозначим $\mathcal{CAT}$ категорию *малых категорий*, в которой морфизмы – это функторы. Есть ли в этой категории начальный объект? Конечный объект?

1.5. Пусть объект $Z \in\in \mathcal{AB}$ таков, что
(а) для любого *ненулевого* объекта $A \in\in \mathcal{AB}$ множество $\mathrm{Mor}_{\mathcal{AB}}(Z, A)$ состоит из более чем одного элемента;
(б) если $\varepsilon : Z \to Z$ – *идемпотент*, то есть $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$, то либо $\varepsilon = 1_Z$, либо $\varepsilon = 0$.

Докажите, что $Z \simeq \mathbb{Z}$.

1.6. Пусть $X, Y, Z \in\in \mathcal{SET}$. Постройте (*естественный*) изоморфизм $Z^{Y\times X} \cong \left(Z^Y\right)^X$. Сохраняет ли смысл эта конструкция при замене $\mathcal{SET}$ на $\mathcal{AB}$?

1.7. Пусть $X, Y, Z \in\in \mathcal{SET}$. Постройте (*естественный*) изоморфизм $Z^{Y+X} \cong Z^Y \times Z^X$. Сохраняет ли смысл эта конструкция при замене $\mathcal{SET}$ на $\mathcal{AB}$?

1.8. Пусть $X, Y, Z \in\in \mathcal{SET}$. Постройте (*естественный*) изоморфизм $(Z \times Y)^X \cong Z^X \times Y^X$. Сохраняет ли смысл эта конструкция при замене $\mathcal{SET}$ на $\mathcal{AB}$?

5 сентября, *Г.Б. Шабат*