

## 2

2.1. Пусть  $R \in \mathcal{RING}$ ; рассмотрим *забывающий* функтор

$$\text{forget} : R\text{-MOD} \longrightarrow \mathcal{SET}.$$

Докажите, что этот функтор сопряжён функтору

$$\text{gener} : \mathcal{SET} \longrightarrow R\text{-MOD} : X \mapsto \bigoplus_{x \in X} Rx,$$

сопоставляющему каждому множеству порождённый им свободный модуль.

2.2. Рассмотрим *забывающий* функтор

$$\text{forget} : \mathcal{GRP} \longrightarrow \mathcal{SET}.$$

Докажите, что этот функтор сопряжён функтору

$$\text{free} : \mathcal{SET} \longrightarrow \mathcal{GRP} : X \mapsto \text{Free}_X,$$

сопоставляющему каждому множеству порождённую им свободную группу.

2.3. Рассмотрим *тавтологический* функтор

$$\text{taut} : \mathcal{AB} \longrightarrow \mathcal{GRP},$$

сопоставляющий каждой абелевой группе её же, но рассматриваемую как просто группа. Докажите, что этот функтор сопряжён функтору

$$\text{ab} : \mathcal{GRP} \longrightarrow \mathcal{AB} : G \mapsto \frac{G}{[G, G]},$$

сопоставляющему каждой группе её фактор по коммутанту.

2.4\*. Пусть  $R \in \mathcal{RING}$ ; рассмотрим *забывающий* функтор

$$\text{forget} : R\text{-MOD} \longrightarrow \mathcal{AB}.$$

Постройте сопряжённый функтор.

2.5\*\*. Пусть  $\mathbb{k} \in \mathcal{FLD}$ ; рассмотрим *забывающий* функтор

$$\text{forget} : \mathbb{k}\mathcal{ALG} \longrightarrow \mathbb{k}\mathcal{VSET}.$$

Постройте сопряжённый функтор.

2.6. Определите функтор *пополнения метрических пространств* (он обобщает построение  $\mathbb{R}$  по  $\mathbb{Q}$ ). Постройте сопряжённый функтор.

12 сентября, Г.Б. Шабат