

9

9.1. Для произвольного натурального $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ рассмотрите группу $G = \left(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^\times$. Каков её порядок?

9.2*. В обозначениях задачи **9.1** для произвольного характера $\chi \in \widehat{G}$ (он называется *характером Дирихле*) рассмотрите функцию

$$\tilde{\chi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}_1 : n \mapsto \begin{cases} \chi(n \bmod m), & \text{если } \text{НОД}(n, m) = 1 \\ 0, & \text{если } \text{НОД}(n, m) \neq 1 \end{cases}$$

Изучите сходимость функции комплексной переменной

$$\mathbf{L}_\chi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(n)}{n^s}.$$

(она называется *рядом Дирихле*).

9.3. В обозначениях задач **9.1** и **9.2** установите для $\text{Re}(s) > 1$ равенство

$$\mathbf{L}_1(s) = \zeta(s) \prod_{p|m} (1 - p^{-s}),$$

где $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана, а произведение берётся по простым делителям p числа m . Выведите отсюда, что $\lim_{s \rightarrow 1} \mathbf{L}_1(s) = \infty$.

9.4*. В обозначениях задач **9.1** и **9.2** введите функцию комплексной переменной

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^\times} \mathbf{L}_\chi(s)$$

и докажите, что она имеет простой полюс при $s = 1$.

9.5*. В обозначениях задач **9.1** и **9.2** докажите, что $\mathbf{L}_\chi(1) \neq 0$ для любого характера $\chi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$.

9.6.** Выведите из предыдущих задач частный случай *теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии*: множество простых $\{3, 13, 23, 43, 53, 73, 83, \dots\}$ бесконечно. Совет. Почитайте книгу Ж.-П. Серра "Курс арифметики".

9.7. Постройте таблицу характеров группы A_4 .

9.8. Постройте таблицу характеров группы D_4 .

7 ноября, Г.Б. Шабат