

Листок 2.

Вещественные числа

Аксиома полноты: любые два непустых множества, одно из которых лежит левее другого на числовой оси, можно разделить точкой.

Задача 1. Докажите, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется аксиома полноты.

Задача 2. Докажите существование и иррациональность числа $\sqrt{5}$.

Задача 3. Заяц прыгает по окружности против часовой стрелки прыжками одинаковой длины, причем никогда не попадает в свой след. Окружность пересекает узкий ручеек. Докажите, что рано или поздно заяц наступит лапой в ручей.

Задача 4. Точки плоскости с целочисленными координатами окружены кружками радиуса 10^{-2019} . Докажите, что всякая прямая проходящая через начало координат пересекает еще а) хотя бы один кружок, б) бесконечно много кружков.

Задача 5. Может ли степень двойки начинаться с цифр 2019?

Комплексные числа

Задача 6. Докажите, что на \mathbb{C} нельзя определить линейный порядок, согласованный с операциями сложения и умножения.

Задача 7. Вычислите сумму $q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots + q^n \sin nx$.

Задача 8.

(а) Какие движение плоскости можно задать отображением $z \rightarrow Az + B$, где $A, B \in \mathbb{C}$ и $|A| = 1$?

(б) Докажите, что отображение $z \rightarrow 1/\bar{z}$ (инверсия) переводит множество всех окружностей и прямых на плоскости в себя.

Задача 9. Изобразите на плоскости множества:

$$a) |z - a| \leq 1, \quad b) \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| = 1, \quad c) |z| = \sin(3\varphi), \quad d) |z| = e^{-\varphi},$$

где $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Задача 10. Четыре букашки, сидевшие в вершинах квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории?

Задача 11. Общежитие и университет находятся на разных концах одной улицы. Студент вышел из общежития и пошел по прямой к университету. На половине пути он решил вернуться в общежитие и пошел обратно. На полдороге к общежитию он подумал, что хорошо бы все-таки сходить в университет, и пошел к университету. На полпути к университету он опять развернулся к общежитию и т.д. К какой точке улицы будет приближаться студент?

Задача 12. Золотое сечение строится следующим образом: от прямоугольника отрезают квадрат так, что оставшийся прямоугольник подобен исходному. Найдите отношение сторон исходного прямоугольника. Будем теперь продолжать отрезать от получающихся прямоугольников квадраты двигаясь против часовой стрелки. К какой точке исходного прямоугольника приближаются квадраты?