НМУ, I курс, 07.10.2019

Листок 4.

Задача 1. Найдите все функции $f$, для которых множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является метрическим пространством с метрикой $\varrho(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Обязано ли это метрическое пространство быть полным? Всегда ли в этом метрическом пространстве существует счетное всюду плотное множество (т.е. в каждом открытом шаре есть точка этого множества)?

Задача 2. Функция $g$ определена на $[0,+\infty)$ и является вогнутой, т.е.

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$$

для всех $x, y \in [0,+\infty)$ и $\alpha \in [0,1]$. Предположим также, что $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при $x > 0$. Докажите, что для всякой метрики $\varrho$, функция $g(\varrho)$ является метрикой. Проверьте, что можно в качестве $g$ взять $g(t) = \frac{t}{1+t}$, $g(t) = \operatorname{arctg} t$, $g(t) = \min\{1,t\}$.

Задача 3. Укажите какие из следующих функций являются метриками на $\mathbb{R}^2$, для метрик изобразите открытый шар радиуса один с центром в нуле и выясните является ли пространство полным:

(a) $\varrho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, (b) $\varrho(x,y) = |x_1 - y_1|$,
(c) $\varrho(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$, (d) $\varrho(x,y) = |x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2$,
(e) $\varrho(x,y) = \min\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$, (f) $\varrho(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$.

Задача 4. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Многочлен

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

называется производной многочлена $P$. Проверьте, что $(PQ)' = PQ' + P'Q$. Докажите, что если $P$ – многочлен степени $n$, то

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Пусть $P_n$ – множество многочленов степени не выше $n$. При каком $k$ функция

$$\varrho(h,g) = \sum_{j\leq k} |h^{(j)}(0) - g^{(j)}(0)|$$

будет метрикой. Будет ли такое пространство полным?

Задача 5. Приведите пример метрического пространства, в котором шар большего радиуса содержится строго внутри шара меньшего радиуса.

Задача 6. Всякое ли метрическое пространство из четырех точек можно изометрично (изометрия – отображение, сохраняющее расстояния) вложить в $\mathbb{R}^3$?

Задача 7. Пусть $X = \{0,1\}^n$, $\varrho(x,y) = \sum_j |x_j - y_j|$.

(a) Найдите число элементов в шаре радиуса $k$.

(b) (код Хэмминга) Рассмотрим следующий способ передачи последовательности из 0 и 1, при котором по полученной последовательности можно исправить ровно одну ошибку, т. е. узнать в каком бите произошла эта ошибка. В последовательности из $2^m - 1$ битов биты с номерами 1, 2, 4, … назовем служебными, а в остальные биты запишем информацию, которую хотим передать. В служебный бит с номером $2^k$ запишем сумму (по модулю 2) цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на $k$-м месте. Тогда сумма цифр в битах (включая служебный), номера которых в двоичной записи содержат 1 на $k$-м месте, равна нулю. После получения последовательности для каждого $k$ вычисляем сумму цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на $k$-м месте. Покажите, что в итоге получается номер бита, при передаче которого произошла ошибка.

(c) Докажите, что при $n = 2^m - 1$ булев куб $X = \{0,1\}^n$ можно представить в виде объединения непересекающихся шаров единичного радиуса, а при других значениях $n$ этого сделать нельзя.

Задача 8. (Принцип вложенных шаров) Докажите, что в полном метрическом пространстве всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку. Покажите на примере, что в принципе вложенных шаров нельзя отказаться от предположения, что радиусы шаров стремятся к нулю. Покажите, что в неполном пространстве принцип вложенных шаров не выполняется.

Задача 9. Предположим, что метрическое пространство обладает следующим свойством: из всякой последовательности его элементов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть для каждого $m$ задана последовательность $\{x_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ элементов этого метрического пространства. Докажите существование такой возрастающей последовательности номеров $n_k$, что для каждого $m$ последовательность $\{x_{n_k}^m\}_{k=1}^{\infty}$ сходится.

Задача 10. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^{\infty}$ бесконечных последовательностей вещественных чисел. Будем говорить, что последовательность $x^N = (x_n^N)$ сходится к $x = (x_n)$, если существует номер $M$ такой, что $x_n^N = x_n$ для всех $N$ при $n > M$ и для каждого $n \leq M$ $x_n^N \to x_n$ при $N \to \infty$. Покажите, что такая сходимость не задается метрикой, т.е. не существует метрики $\varrho$ такой, что $\varrho(x^N, x) \to 0$ равносильно $x^N \to x$.

Задача 11. (Теорема Банаха о сжимающем отображении) Пусть $(X, \varrho)$ – полное метрическое пространство.

(a) Докажите, что если $\varrho(x_n, x_{n-1}) \leq q^n$, $0 < q < 1$, то последовательность $x_n$ удовлетворяет условию Коши и сходится.

(b) Пусть отображение $f\colon X \to X$ является сжимающим, т.е.

$$\varrho(f(x), f(y)) \leq q\varrho(x, y), \quad 0 < q < 1.$$

Тогда последовательность $x_n$, заданная рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

сходится и ее предел является единственным решением уравнения $x = f(x)$ (говорят, что $x$ – неподвижная точка).

(c) Докажите, что числовая последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 = 1$, сходится и найдите ее предел, если $f(x) = \sqrt{2 + x}$ или $f(x) = 2 + 1/x$.

Задача 12. Существует ли неполное метрическое пространство, в котором всякое сжимающее отображение имеет неподвижную точку?