НМУ, I курс, 14.10.2019

Листок 5.

p-адические числа

Пусть p – простое число. Если $a \in \mathbb{Z}$ и $a = p^k a'$, где $k \geq 0$ и $(a', p) = 1$, то $|a|_p = p^{-k}$. По определению $|0|_p = 0$ и $|a/b|_p = |a|_p/|b|_p$. Поле p-адических чисел – пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ относительно нормы $|\cdot|_p$.

Задача 0. Проверьте, что $|ab|_p = |a|_p|b|_p$ и $|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$. Докажите, что в $\mathbb{Q}_p$ если два интервала пересекаются, то один является частью другого.

Задача 1. Найдите (a) $|p!|_p$ (b) $|n!|_p$.

Задача 2. Пусть r_n – фундаментальная (относительно $|\cdot|_p$) последовательность рациональных чисел. Докажите, что $|r_n|_p \to 0$ или $|r_n|_p = |r_N|_p$ для некоторого N и всех $n > N$.

Далее полагаем $|a|_p = \lim_{n\to\infty} |r_n|_p$, где r_n – последовательность Коши, определяющая $a \in \mathbb{Q}_p$.

Задача 3. Докажите, что последовательность $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда последовательность $|a_k|_p$ стремится к нулю; последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда $|a_{n+1} - a_n|_p$ стремится к нулю.

Задача 4. Докажите, что последовательности (a) $x_n = \sum_{k=1}^n p^k$ и (b) $x_n = \sum_{k=1}^n k!k$ сходятся в $\mathbb{Q}_p$ и найдите их пределы.

Задача 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $(k, p) = 1$. Докажите, что $a_n = k^{p^n}$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ к некоторому α. Докажите, что $\alpha^{p-1} = 1$.

Задача 6. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что для всякого рационального числа a с $|a|_p \leq 1$ найдется единственное целое число $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \ldots, p^k - 1\}$ такое, что $|a - \alpha_k|_p \leq p^{-k}$. (Указание: $a = m/n$, где $(n, p) = 1$, и значит $m = sn + tp^k$ и $|a - s|_p \leq p^{-k}$.)

Задача 7. Докажите, что последовательность $a_n = 1/n$ не сходится в $\mathbb{Q}_p$. Докажите, что множество $\{1/n\}_{n=1}^\infty$ всюду плотно в $\{x \in \mathbb{Q}_p \colon |x|_p \geq 1\}$.

Задача 8. Докажите, что всякое p-адическое число a единственным образом представляется в виде суммы

$$a = c_{-m}p^{-m} + \ldots + c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \ldots, \quad c_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, a_{-m} \neq 0.$$

Далее по аналогии с бесконечными десятичными дробями, представляющими вещественные числа, записываем p-адические числа в виде $\ldots c_2 c_1 c_0, \ldots c_{-m}$. Такая запись называется каноническим p-адическим разложением числа.

Задача 9. Найдите каноническое разложение

(a) 35 в $\mathbb{Q}_5$, (b) $6!$ в $\mathbb{Q}_3$, (c) $1/2$ в $\mathbb{Q}_p$.

Задача 10. p-адическое число a имеет каноническое разложение $\ldots c_2 c_1 c_0, \ldots c_{-m}$. Найдите каноническое разложение для $-a$.

Задача 11. Найдите четыре цифры канонического разложения числа

(a) $\ldots 1246 \times \ldots 6003$ в $\mathbb{Q}_7$, (b) $1 : \ldots 1323$ в $\mathbb{Q}_5$, (c) $900 - \ldots 312, 3$ в $\mathbb{Q}_{11}$.

Задача 12. Существуют ли $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ в $\mathbb{Q}_5$?