

## Листок 8.

## СООБРАЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ.

**Теорема о промежуточном значении**

Задача 1. В ряд стоят 500 сапог: 250 правых и 250 левых, но не обязательно парами. Докажите, что найдутся 250 подряд стоящих сапог, среди которых правых и левых поровну.

Задача 2. Турист вчера утром 9.00 начал подъем в гору и вечером остановился на ночлег на вершине. Сегодня он в 9.00 начал спуск и к вечеру был уже внизу. Спускался и поднимался турист по одной тропе, но в процессе движения менял скорость и делал остановки. Докажите, что найдется такое место на тропе, в котором турист находился вчера и сегодня в одно и тоже время.

Задача 3. Дана выпуклая фигура. Докажите, что существует прямая, одновременно делящая пополам её площадь и периметр.

Задача 4. Представьте себе, что пол на кухне у вас не очень ровный (так обычно бывает, особенно если он покрыт линолеумом). Поэтому квадратный табурет стоит на полу только тремя ножками, а четвертая ножка висит в воздухе. Можно ли так передвинуть табурет, чтобы он стоял на полу всеми четырьмя ножками, или может случиться, что, как его ни двигай, табурет все равно будет качаться? Мы, конечно, предполагаем, что, когда табурет твердо стоит на четырех ножках, его поверхность может быть несколько наклонена по отношению к полу.

Следующие две задачи иногда называют «теоремами о блинах».

Задача 5. Даны две выпуклые фигуры (может быть, пересекающиеся). Докажите, что существует прямая, делящая площадь каждой фигуры пополам.

Задача 6. Найдите ошибку в доказательстве утверждения, что любую выпуклую фигуру можно разделить парой взаимно перпендикулярных прямых на четыре равновеликие части. Доказательство: "В любом направлении можно провести единственную прямую  $l$ , делящую площадь фигуры пополам. Каждую из получившихся половин фигуры можно разделить на две равновеликие части прямыми, перпендикулярными  $l$ . Пусть  $A$  и  $B$  – точки пересечения этих перпендикулярных прямых с прямой  $l$ . Начнем изменять направление прямой  $l$ , сохраняя все построения. После изменения направления на  $180^\circ$  точки  $A$  и  $B$  меняются местами. Значит в некоторый момент они совпадали. В этот момент перпендикулярные прямые совпадали и вместе с прямой  $l$  делили фигуру на четыре равновеликие части." Дайте правильное доказательство.

Задача 7. Докажите, что вокруг любой выпуклой фигуры можно описать квадрат.

**Непрерывные кривые на окружности.**

Пусть  $\gamma: [0, 1] \mapsto S^1$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , где  $x, y$  – непрерывные функции. Далее всегда предполагаем, что  $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ . Непрерывная функция  $f: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  называется поднятием кривой  $\gamma$ , если  $\gamma(t) = (\cos(2\pi f(t)), \sin(2\pi f(t)))$ .

Задача 8. Изобразите графики поднятий  $f$  (считая, что  $f(0) = 0$ ) для кривых

$$(a) \quad \gamma(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)), \quad (b) \quad \gamma(t) = (\cos(t(1-t)), \sin(t(1-t))).$$

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  точками  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N = 1$  на отрезки столь малой длины, что множество  $\gamma([a_{k-1}, a_k])$  лежит на дуге, длина которой строго меньше  $\pi/2$ .

Будем строить поднятие  $f$  следующим образом. На каждом отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$  определена функция  $f_k(t) = \operatorname{arctg}(y(t)/x(t))$  или  $= \operatorname{arcctg}(x(t)/y(t))$ , для которой верно равенство

$\gamma(t) = (\cos f_k(t), \sin f_k(t))$  при  $t \in [a_{k-1}, a_k]$ . Числа  $f_{k-1}(a_{k-1})$  и  $f_k(a_{k-1})$  отличаются на  $2\pi m$ . Сдвигая функции  $f_k$  на подходящие числа  $2\pi m$  сшиваем из них непрерывную функцию  $f$  на  $[0, 1]$ , причем так, что  $f(0) = 0$ .

Задача 9. Докажите, что функция  $f$  действительно является поднятием и  $f(1) \in \mathbb{Z}$ . Каков геометрический смысл  $f(1)$ ? Докажите, что существует только одно поднятие  $f$ , для которого  $f(0) = 0$ .

Далее рассматриваем только поднятие  $f$ , удовлетворяющее условию  $f(0) = 0$ . Величину  $f(1)$  называют степенью кривой  $\gamma$  и обозначают через  $\deg \gamma$ .

Предположим, что для каждого  $s$  задана кривая  $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $\gamma_s(0) = \gamma_s(1) = (1, 0)$ . Если это семейство кривых обладает следующим свойством: для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всякого  $t \in [0, 1]$  и всех  $s_1, s_2 \in [0, 1]$  из неравенства  $|s_1 - s_2| < \delta$  следует  $|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < \varepsilon$ , то говорят, что задана гомотопия путей  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

Задача 10. Докажите, что тем самым задана гомотопия поднятий  $f_0$  и  $f_1$  и, более того, верно равенство  $\deg \gamma_0 = \deg \gamma_1$ .

Задача 11. (Основная теорема алгебры) Докажите, что всякий непостоянный многочлен над полем комплексных чисел имеет корень. (Указание: предположим обратное и рассмотрим выражение  $\gamma_s(t) = g(se^{it})$ ,  $g(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$ ; при каждом  $s$  это непрерывная кривая на окружности, причем при больших  $s$  степень кривой равна степени многочлена  $P$ , а при  $s = 0$  эта степень равна нулю; противоречие.)

Задача 12. (Теорема Брауэра о неподвижной точке) Пусть  $z = f(w)$  непрерывное отображение (определение непрерывности для комплексных чисел дословно такое же как и для вещественных)  $B_1 = \{z : |z| \leq 1\}$  в себя. Докажите, что существует неподвижная точка  $z = f(z)$ . (Указание: предположим обратное и рассмотрим выражение  $\gamma_s(t) = g(se^{it})$ , где  $g(z)$  – точка пересечения луча, выходящего из  $f(z)$  и проходящего через  $z$ , с окружностью  $S^1$ ; заметим, что  $g(z) = z$  при  $|z| = 1$ ; тогда степень  $\gamma_0$  равна нулю, а степень  $\gamma_1$  равна единице.)

Задача 13. Докажите, что если  $f: B_1 \mapsto \mathbb{C}$  и  $f(z) = -f(-z)$  при  $|z| = 1$ , то существует точка  $z_0 \in B_1$ , в которой  $f(z_0) = 0$ . (Указание: предположим обратное и рассмотрим выражение  $\gamma_s(t) = g(se^{it})$ , где  $g(z) = f(z)/|f(z)|$ ; степень  $\gamma_1$  является нечетным числом, а степень  $\gamma_0$  равна нулю.)

Задача 14. (Теорема Борсука-Улама) Для всякого непрерывного отображения  $f$  двумерной сферы  $S^2$  в  $\mathbb{R}^2$  существует точка  $x \in S^2$ , для которой  $f(x) = f(-x)$ . (Указание: посчитайте разность значений  $f$  в диаметрально противоположных точках и спроектируйте полусферу на круг.)

Задача 15. Докажите, что на земле существуют две диаметрально противоположные точки, в которых совпадают давление и температура.