НМУ, I курс, 18.11.2019

Листок 9.

Последовательность функций $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ сходится к функции f поточечно на A, если для всякого $x \in A$ верно $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Последовательность функций $f_n\colon A \mapsto \mathbb{R}$ сходится к функции f равномерно на A, если $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Задача 1. (Критерий Коши) Докажите, что последовательность функций f_n сходится на A равномерно тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что $\forall n, m > N$ выполняется неравенство $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, множество $B(A)$ ограниченных функций $f\colon A \to \mathbb{R}$ с метрикой

$$\varrho(f, g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$$

является полным метрическим пространством.

Задача 2. (Признак Вейерштрасса) Пусть $\sup_{x\in A} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le a_n$ и ряд $\sum_n a_n$ сходится. Покажите, что последовательность функций f_n сходится равномерно к некоторой функции f на множестве A. Переформулируйте этот признак для рядов (ряд сходится равномерно, если равномерно сходится последовательность его частичных сумм). Приведите пример, показывающий, что признак Вейерштрасса не является необходимым условием равномерной сходимости.

Задача 3. Исследуйте поточечную и равномерную сходимость:
(a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0, 1]$, (b) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x > 0$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $x > 0$.

Задача 4. Пусть последовательность многочленов P_n такова, что $\deg P_n \le m$ для всех n и P_n поточечно сходятся к некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что f является многочленом степени не выше m и P_n равномерно сходятся к f на $[0, 1]$.

Задача 5. (a) Пусть функции f_n непрерывны по A в точке $a \in A$ и сходятся равномерно к функции f на A. Тогда функция f непрерывна по A в точке a. Покажите на примере, что для поточечной сходимости это утверждение не выполняется.

(b) Пусть функции f_n непрерывны на $\mathbb{R}$ и сходятся поточечно к функции f. Докажите, что у функции f множество точек непрерывности всюду плотно.

Из пункта (a) задачи 5 в частности следует, что множество $C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций с метрикой $\varrho(f, g) = \max_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$ является полным метрическим пространством.

Задача 6. Пусть f_n и f – непрерывные функции на $[0, 1]$, причем последовательность f_n сходится к f поточечно на $[0, 1]$. Предположим, что имеет место хотя бы одно из следующих условий

(a) для каждого n функция f_n монотонна,

(b) для каждого x последовательность $f_n(x)$ монотонна.

Тогда f_n сходится к f равномерно на $[0, 1]$.

Задача 7. (Теорема Арцела-Асколи) Докажите, что множество $\mathcal{F} \subset C[0, 1]$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ ограничено и элементы $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывны: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in [0, 1]$ и всех $f \in \mathcal{F}$ верно $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Задача 8. Докажите, что из последовательности функций $f_n(x) = \sin nx$ на отрезке $[0,1]$ нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Задача 9. (Теорема Хелли) Докажите, что из равномерно ограниченной на отрезке последовательности монотонных функций можно выбрать подпоследовательность, которая поточечно сходится.

Множество X с выделенной системой подмножеств τ называется топологическим пространством, если 1) $\emptyset, X \in \tau$, 2) пересечение всяких двух множеств из τ входит в τ, 3) объединение всякого набора множеств из τ входит в τ. Множества из τ называются открытыми, а само семейство τ называется топологией. База топологии – такая система открытых множеств, что их объединения дают все открытые множества. Типичным примером топологического пространства является метрическое пространство. В качестве базы топологии в метрическом пространстве можно взять все открытые шары.

Последовательность x_n элементов топологического пространства сходится к элементу x, если для всякого открытого множества U, содержащего x, найдется номер N такой, что $x_n \in U$ для всех $n > N$.

Задача 10. Пусть $\mathbb{R}^T$ – пространство функций $f\colon T \mapsto \mathbb{R}$, где T – непустое множество. Топология задана базой множеств вида

$$U_{f,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{g \in \mathbb{R}^T\colon |g(t_i) - f(t_i))| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

Докажите, что

(a) f_n сходится к f в данной топологии тогда и только тогда, когда f_n сходится к f поточечно на T;

(b) если T – не более чем счетное множество, то данная топология метризуема;

(c) если T более чем счетно, то данную топологию нельзя задать метрикой.

Задача 11. Приведите пример топологического пространства и последовательности его элементов, имеющей более одного предела.

Частично упорядоченное множество T называется *направленным*, если для всяких $t, s \in T$ найдется $u \in T$ такое, что $t \le u$ и $s \le u$. Набор элементов $\{x_t\}_{t\in T}$, индексируемых направленным множеством T, называется направленностью. Направленность $\{x_t\}_{t\in T}$ сходится к элементу x, если для всякого открытого множества U, содержащего x, найдется t_0 такое, что $x_t \in U$ для всех $t \ge t_0$.

Задача 12.

(a) Приведите пример направленности $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ элементов $\mathbb{R}$ с обычной топологией, которая сходится к нулю, но бесконечно много ее элементов лежит вне $(-1,1)$.

(b) Докажите, что для всякой предельной точки a некоторого множества E (всякое открытое множество, содержащее a, содержит отличный от a элемент множества E) найдется направленность из элементов E, сходящаяся к a. Приведите пример предельной точки, для которой нет сходящейся к ней последовательности элементов E.