Правильные многогранники и их симметрии

Задача 2.1. а) Докажите, что два противоположных ребра правильного икосаэдра образуют «золотой прямоугольник» (отношение сторон равно $(1+\sqrt{5})/2 =: \phi$).

б*) Убедитесь, что 12 точек $(\pm\phi, \pm 1, 0)$, $(0, \pm\phi, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm\phi)$ расположены в вершинах правильного икосаэдра (в частности, икосаэдр действительно существует).

Задача 2.2. а) Докажите, что если правильный многогранник имеет символ Шлефли[1] $\{p, q\}$, то $1/p + 1/q > 1/2$. Выведите отсюда, что любой правильный многогранник — одно из 5 платоновых тел.

б*) Докажите, что существует не более 6 правильных многогранников размерности 4. Выпишите их символы Шлефли.

Задача 2.3. Пусть r, s и t — отражения относительно плоскостей, ортогональных векторам $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(0,1,1)$ соответственно.

а) Найдите композиции rs, st, rt. Каковы порядки этих преобразований?

б) Сколько элементов в группе, порожденной отражениями r, s и t?

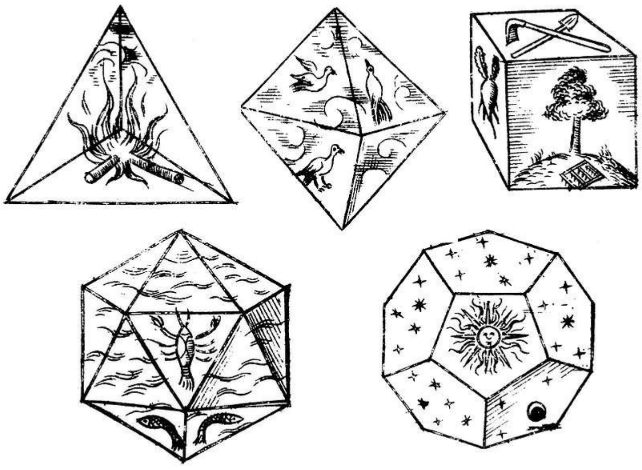
Задача 2.4. Пусть s_i $(i = 1, \dots, n)$ — отражения относительно гиперплоскостей, ортогональных векторам $e_{i-1} + e_i$ в $(n+1)$-мерном пространстве (с базисом $e_0, e_1, \dots, e_n$).

а) Найдите порядок элемента $s_i s_j$.

б) Сколько элементов в группе, порожденной отражениями s_i?

Задача 2.5. а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из группы вращений додекаэдра в группу перестановок 5 элементов. Найдите его образ.

б*) Найдите в S_6 подгруппу S_5, вложенную нестандартным образом (не совпадающую со всеми перестановками, сохраняющими данный элемент). Убедитесь, что действие S_6 сопряжениями на 6 таких подгруппах задает автоморфизм S_6, не являющийся внутренним (при $n \neq 6$ таких автоморфизмов у S_n не бывает).



[1] Т. е. в каждой его вершине сходится q правильных p-угольников.