

Дробно-линейные преобразования

▷ Будем отождествлять комплексное число $z = x + yi$ с точкой $Z = (x, y)$ плоскости.

Задача 6.1. а) Преобразование плоскости $z \mapsto az$ ($a \neq 0$) является *поворотной гомотетией* (т. е. композицией поворота и гомотетии с тем же центром).

б) При каких a и b преобразование плоскости $z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$) является поворотной гомотетией? С каким центром? Когда оно является поворотом?

в) Композиция поворотных гомотетий и параллельных переносов является либо поворотной гомотетией, либо параллельным переносом. Композиция поворотов и параллельных переносов является либо поворотом, либо параллельным переносом.

Задача 6.2. а) Докажите, что точки Z_1, Z_2, Z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение* $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ вещественно. Каков геометрический смысл аргумента и модуля простого отношения трех произвольных точек?

б) Четыре точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на одной окружности или одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ вещественно.

Задача 6.3. Сколько различных двойных отношений можно получить, нумеруя по-разному одни и те же 4 точки?

* * *

Задача 6.4. Преобразование вида $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ является биекцией $\bar{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

▷ Такие преобразования называются *дробно-линейными*. Группа всех дробно-линейных преобразований обозначается $PGL_2(\mathbb{C})$.

Задача 6.5. Группа $PGL_2(\mathbb{C})$ порождена аффинными преобразованиями $z \mapsto az + b$ и преобразованием $z \mapsto 1/z$.

Задача 6.6. Дробно-линейные преобразования а) сохраняют двойное отношение четверок точек; б) переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности; в) сохраняют углы между кривыми (например, между обобщенными окружностями).

▷ Напомним, что преобразование $z \mapsto 1/\bar{z}$ является примером инверсии.

Задача 6.7. а) Любая инверсия может быть записана в виде $z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$.

б) Какими из свойств из задачи 6 обладают и инверсии?

Задача 6.8. Действие группы $PGL_2(\mathbb{C})$ транзитивно а) на обобщенных окружностях; б) на тройках (различных) точек $\bar{\mathbb{C}}$.

Задача 6.9. Опишите все дробно-линейные преобразования, сохраняющие а) верхнюю полуплоскость; б) внутренность единичной окружности; докажите, что эти группы изоморфны.