

## Гиперболическая геометрия

**Задача 8.1.** Докажите, что любая евклидова окружность внутри модели на круге является и гиперболической окружностью. Совпадает ли ее обычный (евклидов) центр с ее «гиперболическим центром»?

**Задача 8.2.** Две расходящиеся (т. е. не имеющие общих точек ни в плоскости, ни на абсолюте) прямые имеют ровно один общий перпендикуляр.

**Задача 8.3.** а) Докажите, что все гиперболические «треугольники» с вершинами на абсолюте равны.

б) Докажите, что все гиперболические описанные « $n$ -угольники» с вершинами на абсолюте равны.

**Задача 8.4.** Сохраняющее ориентацию движение в гиперболической геометрии заменой координат может быть приведено к одному из следующих видов:

- гомотетия верхней полуплоскости с центром в нуле («гиперболическое движение»);
- сдвиг верхней полуплоскости вдоль действительной оси («параболическое движение»);
- поворот круга относительно его центра («эллиптическое движение»).

\* \* \*

**Задача 8.5.** а) Найдите (гиперболическую) середину отрезка с концами  $ai$  и  $bi$  (числа  $a$  и  $b$  вещественные) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

б) В модели Пуанкаре в круге с центром  $O$  гиперболическое расстояние  $OA$  равно  $r$ . Чему равно евклидово расстояние  $OA$ ?

**Задача 8.6.** а) Докажите, что выражение  $\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$  сохраняется при действии группы  $PSL_2(\mathbb{R})$  на верхней полуплоскости. б) Выясните, как это выражение связано с гиперболическим расстоянием между точками  $Z$  и  $W$ . в) Убедитесь, что для близких точек в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости  $d(Z, W) = |z-w|/\operatorname{Im} z + o(|z-w|)$  («элемент длины имеет вид  $ds/y$ , где  $ds$  — евклидов элемент длины»).

**Задача 8.7.** Две прямые строго параллельны (т. е. пересекаются на абсолюте). Равно ли расстояние между ними нулю?

**Задача 8.8.** Найдите геометрическое место точек, удаленных на расстояние  $k$  от прямой  $\operatorname{Re} z = 0$  в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Является ли оно парой прямых?

**Задача 8.9.** Чему в гиперболической геометрии равна а) длина  $l(r)$  окружности радиуса  $r$ ; б) площадь  $s(r)$  круга радиуса  $r$ ?

**Задача 8.10.** а) Для прямоугольного треугольника выполняется *гиперболическая теорема Пифагора*:  $s(c) = s(a) + s(b) + s(a)s(b)/2\pi$ .

б) Существует такая константа, что в любом гиперболическом прямоугольном треугольнике  $a + b - c$  не превосходит эту константу.