

Проективные преобразования и модель Кэли–Клейна

Задача 10.1. Дана четверка прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что двойное отношение 4 точек, отсекаемых исходными прямыми на еще одной прямой, не зависит от выбора этой вспомогательной прямой.

Задача 10.2. Запишите уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, параболы $y = x^2$, окружности $x^2 + y^2 = 1$ в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.

Задача 10.3. Укажите какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параболу $y = x^2$. Единственно ли оно?

Задача 10.4. Образ кривой второй степени при проективном преобразовании плоскости — кривая второй степени.

Задача 10.5. Гиперболическая окружность в модели Клейна является евклидовым эллипсом.

Задача 10.6. Дан круг, его хорда AB и точка X внутри круга. Пусть P — точка пересечения касательных к кругу в точках A и B . Докажите, что PX — гиперболический перпендикуляр к AB (для модели Кэли–Клейна в данном круге).

Задача 10.7. Дан круг и две его пересекающиеся хорды. Постройте одной линейкой прямую, являющуюся гиперболической биссектрисой угла между ними.

Задача 10.8. а) Если две высоты гиперболического треугольника пересекаются, то все три его высоты пересекаются в одной точке. б*) Сформулируйте и докажите обобщение на произвольные гиперболические треугольники.

Задача 10.9*. а) Средняя линия треугольника перпендикулярна срединному перпендикуляру к соответствующей стороне. б) Медианы гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.

