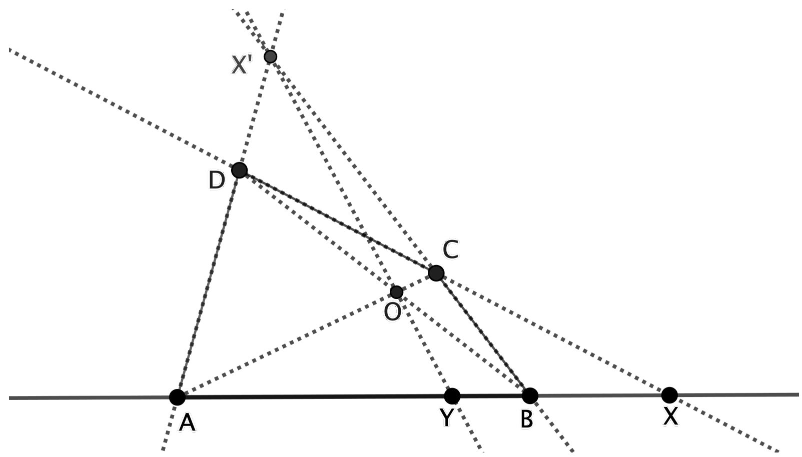
Проективные преобразования и алгебра

Задача 12.1. Если биективное преобразование $P^1(K) := K \cup \{\infty\}$ (здесь и далее произвольное поле K можно считать полем $\mathbb{R}$) сохраняет двойное отношение, то оно является дробно-линейным преобразованием.

▷ Говорят, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{x, y\}$ проективной прямой делят друг друга гармонически, если двойное отношение (a, b, x, y) равно -1.

Задача 12.2. В четырехугольнике $ABCD$ продолжения противоположных сторон пересекаются в точках X и X', O — точка пересечения диагоналей, Y — пересечение OX' с AB. Докажите, что точки $\{A, B\}$ и $\{X, Y\}$ делят друг друга гармонически.



Задача 12.3. а) При каком условии пара $\{x, \infty\}$ делит гармонически пару $\{a, b\}$? При каком условии пара $\{x, y\}$ делит гармонически $\{0, 1\}$?

б) Если биективное преобразование $P^1(K)$ сохраняет гармоническое деление и оставляет на месте точки 0, 1, ∞, то оно является автоморфизмом поля K.

▷ Биективное преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые, называется *коллинеацией*.

Задача 12.4. Коллинеация сохраняет гармоническое деление.

Задача 12.5. а) У поля $\mathbb{R}$ нет нетривиальных автоморфизмов.

б) Любая коллинеация $P^2(\mathbb{R})$ лежит в $PGL_3(\mathbb{R})$ *("теорема Мёбиуса–фон Штаудта")*.

* * *

Задача 12.6*. Разобьем грани додекаэдра на 6 пар противоположных. Напишем на одной из них "∞", а на ее соседях — последовательно числа от 0 до 4. Докажите, что возникающее действие группы вращений додекаэдра на $P^1(\mathbb{F}_5)$ задает изоморфизм $A_5 \cong PSL_2(\mathbb{F}_5)$.

Задача 12.7*. а) Сколько из инволюций $P^1(\mathbb{F}_5)$ без неподвижных точек *не* являются дробно-линейными преобразованиями? б) $S_5 \cong PGL_2(\mathbb{F}_5) \subset S_6$.