Листок 4. Проунипотентные алгебры Хопфа

Упражнение 4.1. Конечность для алгебр Хопфа

(i) Докажите, что любую алгебру Хопфа H над полем k можно представить как направленное объединение $H = \bigcup\limits_{i \in I} H_i$, где $H_i \subset H$ являются подалгебрами Хопфа, конечно порожденными как алгебры над k. (Указание: воспользуйтесь существованием представления $H = \bigcup\limits_{i \in I} H'_i$, где $H'_i \subset H$ являются подбиалгебрами, а затем модифицируйте H'_i, чтобы они стали подалгебрами Хопфа.)

(ii) Пусть $V \subset H$ — конечномерный подкомодуль в биалгебре H над полем k, порождающий H как алгебру над k. Покажите, что образ отображения $V \otimes V^\vee \to H$, естественно заданного кодействием $V \to V \otimes H$, также порождает H как алгебру над k. (Указание: ограничение на V коединицы ϵ задает элемент $\epsilon|_V \in V^\vee$, и это определяет отображение $\mathrm{id} \otimes \epsilon|_V \colon V = V \otimes k \to V \otimes V^\vee$. Рассмотрите композицию этого отображения с указанным выше отображением $V \otimes V^\vee \to H$.)

(iii) Докажите, что любая коммутативная алгебра Хопфа H, конечно порожденная как алгебра над k, является фактором алгебры Хопфа $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_n)$ для некоторого натурального числа n. (Указание: воспользуйтесь тем, что существует конечномерный подкомодуль $V \subset H$, порождающий H как алгебру над k, пунктом (ii), а также тем, что алгебра Хопфа $\mathcal{O}\big(\mathrm{GL}(V)\big)$ порождается как алгебра над k матричными элементами, т.е. элементами из $V \otimes V^\vee \subset \mathcal{O}\big(\mathrm{GL}(V)\big)$.)

Упражнение 4.2. Замкнутые подгруппы

(i) Пусть H — конечно порожденная приведенная коммутативная алгебра Хопфа над полем k, $G = \mathrm{Spec}(H)$, и пусть $\Gamma \subset G(k)$ — теоретико-множественная подгруппа. Докажите, что тогда замыкание в топологии Зарисского $\overline{\Gamma} \subset G$ является замкнутой алгебраической подгруппой в G. (Указание: воспользуйтесь тем, что взятие обратного элемента и сдвиг на элемент определяют гомеоморфизмы алгебраической группы G с собой.)

(ii) Пусть $H \to H'$ — морфизм конечно порожденных приведенных коммутативных алгебр Хопфа над полем k, $G = \mathrm{Spec}(H)$, $G' = \mathrm{Spec}(H')$. Покажите, что образ соответствующего морфизма между алгебраическими группами $\varphi\colon G' \to G$ замкнут. (Указание: сначала сведите все к случаю, когда поле k алгебраически замкнуто и примените пункт (i) к подгруппе $\varphi\bigl(G'(k)\bigr) \subset G(k)$; далее воспользуйтесь теоремой Шевалле о конструктивности образа, а также тем, что произведение двух плотных открытых подмножеств в алгебраической группе совпадает со ней.)

Упражнение 4.3. Унипотентная фильтрация на алгебре Хопфа

(i) Для произвольной биалгебры H положим $\overline{H} = H/k \cdot 1$ и определим k-линейное отображение $\overline{\Delta}^p\colon H \to \overline{H}^{\otimes(p+1)}$ как композицию итерированного коумножения $\Delta^p\colon H \to H^{\otimes(p+1)}$ и естественного отображения $H^{\otimes(p+1)} \to \overline{H}^{\otimes(p+1)}$. Покажите, что выполняется равенство $N_pH = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta}^p)$, где $N_\bullet H$ обозначает унипотентную фильтрацию. (Указание: рассмотрите композицию

$$H \xrightarrow{\Delta^{p+1}} H^{\otimes(p+2)} \longrightarrow H \otimes \overline{H}^{\otimes(p+1)} \xrightarrow{\epsilon\otimes\mathrm{id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{id}} \overline{H}^{\otimes(p+1)}$$

воспользуйтесь похожим утверждением об унипотентной фильтрации на комодулях.)

(ii) Покажите, что естественное вложение $\mathrm{prim}(H) \subset H$ задает изоморфизм $\mathrm{prim}(H) \simeq \mathrm{gr}_1^N H$.

Упражнение 4.4. Унипотентность группы $\mathbb{G}_a$

(i) Докажите, что алгебра Хопфа $\mathcal{O}(\mathbb{G}_a) = k[T]$, $\Delta(t) = 1\otimes t + t\otimes 1$, унипотентна, непосредственно используя определение унипотнетности в терминах инвариантов в комодулях. (Указание: сначала сведите к случаю алгебраически замкнутого поля k и конечномерного представления $\rho\colon \mathbb{G}_a \to \mathrm{GL}_n$, для которого существует гомоморфизм групп $\lambda\colon k \to k^*$ такой, что все собственные значения оператора $\rho(a)$ равны $\lambda(a)$ для любого $a \in \mathbb{G}_a(k) = k$. Далее, воспользовавшись алгебраичностью гомоморфизма $\lambda^n = \det \circ \rho$, покажите его тривиальность, выведите из этого тривиальность λ и, наконец, докажите наличие ненулевых инвариантов в данном представлении.)

(ii) Покажите, что выполняется равенство

$$\Delta^p(t) = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes t + 1 \otimes \ldots \otimes t \otimes 1 + \ldots + t \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1\,.$$

(iii) Докажите, что алгебра Хопфа $\mathcal{O}(\mathbb{G}_a) = k[T]$ унипотентна, используя критерий унипотентности в терминах унипотентной фильтрации на алгебре Хопфа. (Указание: воспользуйтесь пунктом (ii), тем, что $\Delta^p \colon H \to H^{\otimes(p+1)}$ является гомоморфизмом алгебр и упражнением 4.3(i), чтобы показать, что $N_p\mathcal{O}(\mathbb{G}_a)$ содержит пространство многочленов степени не выше p.)

(iv) Покажите, что если $\mathrm{char}(k) = 0$, то $N_p\mathcal{O}(\mathbb{G}_a)$ совпадает с пространством многочленов степени не выше p. Покажите, что это не так в случае $\mathrm{char}(k) > 0$.

Упражнение 4.5. Забывающий функтор из c-векторных пространств

(i) Покажите, что забывающий функтор $\mathrm{cVect}(k) \to \mathrm{Vect}(k)$ сопряжен справа к функтору проконечномерного пополнения

$$\mathrm{Vect}(k) \longrightarrow \mathrm{cVect}(k)\,, \qquad V \longmapsto \varprojlim_{i \in I} U_i\,,$$

где U_i, $i \in I$, пробегает все конечномерные факторы $V \to U_i$.

(ii) Докажите, что забывающий функтор $\mathrm{cVect}(k) \to \mathrm{Vect}(k)$ коммутирует с обратными пределами. (Указание: воспользуйтесь пунктом (i).)

Упражнение 4.6. Коммутативные проунипотентные группы

(i) Для произвольного c-векторного пространства U и его двойственного пространства $V = U^\vee$ рассмотрим структуру алгебры Хопфа на симметрической алгебре $S(V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n(V)$, т.е. на алгебре многочленов от элементов из V, заданную на порождающих по формуле $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$, $v \in V$. Покажите, что данное копроизведение кокомутативно, алгебраическая группа $\underline{U} := \mathrm{Spec}\big(T(V)\big)$ коммутативна и проунипотентна, $\underline{U}$ является (возможно, бесконечным) итерированным расширением алгебраических групп $\mathbb{G}_a$, и что имеется канонический изоморфизм c-векторных пространств $\underline{U}(k) \simeq U$.

(ii) Для произвольной проунипотентной алгебры Хопфа H постройте естественный морфизм проунипотентных групп $f\colon G = \mathrm{Spec}(H) \to \underline{\mathrm{prim}(H)}$. Покажите, что при этом для любого натурального числа $n \geqslant 1$ композиция

$$S^n\bigl(\mathrm{prim}(H)\bigr) \xrightarrow{f^*} N_n H \longrightarrow \mathrm{gr}_n^N H \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{prim}(H)^{\otimes n}$$

индуцирована отображением $\sum\limits_{\sigma \in S_n} \sigma\colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

(iii) Покажите, что если проунипотентная группа G коммутативна и $\mathrm{char}(k) = 0$, то f является изоморфизмом. (Указание: из проунипотентности G следует инъективность отображения $\Delta^n\colon \mathrm{gr}_n^N H \to \mathrm{prim}(H)^{\otimes n}$, а из коммутативности G следует, что образ данного отображения содержится в пространстве симметрических тензоров $(V^{\otimes n})^{S_n}$; далее воспользуйтесь пунктом (ii).)

(iv) Постройте контрпример к утверждению, аналогичному пункту (iii), в случае, когда $\mathrm{char}(k) > 0$. (Указание: вектора Витта.)

Упражнение 4.7. Тензорная алгебра Хопфа

Для c-векторного пространства U рассмотрим на c-векторном пространстве $T^\Pi(U) = \prod\limits_{n \geqslant 0} U^{\hat{\otimes} n}$ коумножение, коединицу и отображение антипода, заданные на порождающих $u \in U$ по формулам $\Delta(u) = 1 \otimes u + u \otimes 1$, $\epsilon(u) = 0$ и $\iota(u) = -u$, соответственно.

(i) Покажите, что данные формулы задают на $T^\Pi(U)$ структуру кокоммутативной алгебры Хопфа.

(ii) Рассмотрим двойственное (обычное) пространство $V = U^\vee$. Покажите, что структура из пункта (i) задает на пространстве $T(V) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$ структуру коммутативной алгебры Хопфа, где произведение, копроизведение и отображение антипода задаются в бар-обозначениях по формулам

$$(v_1|\dots|v_n) \otimes (v'_1|\dots|v'_{n'}) \longmapsto \sum_{\tau \in S_{n,n'}} \tau(v_1|\dots|v_n|v'_1|\dots|v'_{n'})\,,$$

$$(v_1|\dots|v_n)\longmapsto\sum_{i=0}^{n}(v_1|\dots|v_i)\otimes(v_{i+1}|\dots|v_n)\,,$$
$$(v_1|\dots|v_n)\longmapsto(-1)^n(v_n|\dots|v_1)\,,$$
соответственно, где $v_i\in V$, $n,n'\geqslant 0$, а $S_{n,n'}$ обозначает множество (n,n')-тасовок.

(iii) Пусть пространство $V=k\cdot v$ одномерно. Покажите, что тогда алгебра Хопфа $T(V)$ изморфна алгебре многочленов над k от переменной v с разделенными степенями, т.е. $T(V)\simeq\bigoplus\limits_{n\geqslant 0}k\cdot\gamma_n(v)$, причем $\Delta(\gamma_n(v))=\sum\limits_{i=0}^{n}\gamma_i(v)\otimes\gamma_{n-i}(v)$. В частности, имеется канонический сюръективный морфизм коммутативных проунипотентных групп $\mathrm{Spec}\big(T(k\cdot v)\big)\to\mathbb{G}_a$, являющийся изоморфизмом в случае, когда $\mathrm{char}(k)=0$.

Упражнение 4.8. Проунипотентное пополнение группы $\mathbb{Z}$

(i) Покажите, что алгебра Хопфа $\mathcal{O}(\mathbb{Z}^{\mathrm{un}})$ двойствена к мультипликативному формальному закону, т.е. к c-алгебре Хопфа $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{G}}_m)$, являющейся пополнением алгебры Хопфа $\mathcal{O}(\mathbb{G}_m)$ по идеалу $(t-1)$. (Указание: воспользуйтесь формулой Квиллена.)

(ii) Элемент $1\in k=\mathbb{G}_a(k)$ канонически задает морфизм проунипотентных групп $\mathbb{Z}^{\mathrm{un}}\to\mathbb{G}_a$. Докажите, что если $\mathrm{char}(k)=0$, то тогда этот морфизм является изоморфизмом. (Указание: воспользуйтесь тем, что в этом случае все одномерные коммутативные формальные законы над k изоморфны, а также упражнением 4.7(iii).)

Упражнение 4.9. Проунипотентное пополнение свободной группы

Пусть $\mathrm{char}(k)=0$ и пусть Γ является свободной группой от r образующих $\gamma_1,\dots,\gamma_r\in\Gamma$. Пусть U — векторное пространство с базисом $e_1,\dots,e_r$ и положим $V=U^\vee$. Рассмотрим гомоморфизм $\Gamma\to\mathrm{Spec}\big(T(V)\big)$, переводящий γ_i в групповой элемент $\exp(e_i)\in T^{\Pi}(U)$. Докажите, что это является проунипотентным пополнением группы Γ. (Указание: воспользуйтесь критерием проунипотентного пополнения.)