Алгебра-2: Осенний Семестр

В данном курсе мы предполагаем затронуть начала коммутативной алгебры, теории Галуа и структурную теорию полупростых алгебр.

Семинар 1. Нетеровы кольца и модули

Задача 1.1. Пусть R – нетерово кольцо. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ также нетерово.

Задача 1.2. Докажите индукцией по числу порождающих, что конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом является нетеровым.

Задача 1.3*. Пусть M – нетеров R-модуль и пусть $\mathfrak{a} \subset R$ – аннигиляционный идеал, состоящий из элементов, действующих нулем в M. Докажите, что $R/\mathfrak{a}$ является нетеровым кольцом.

Задача 1.4. Опишите какую-нибудь систему образующих идеала в кольце многочленов от 3 переменных $\mathbb{C}[x, y, z]$, состоящем из функций, обращающихся в нуль

(а) на всех координатных плоскостях;
(б) на всех координатных прямых;
(в) во всех точках вида (t^2, t^3, t^4), где $t \in \mathbb{C}$;
(г) во всех точках вида (t^2, t^3, t^4), где $t \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.5. Найдите (задайте образующими и соотношениями) кольцо полиномов от 2 переменных, инвариантных относительно действия **(а)** группы диэдра D_n; **(б)** группы вращений правильного n-угольника $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 1.6. Найдите какие-нибудь образующие идеала $\mathfrak{a}$ в кольце симметрических функций $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{\mathbb{S}_3}$, состоящем из функций, обращающихся в ноль при

(а) $x_1 = x_2$, **(б)** $x_1 = x_2 = x_3$.

Семинар 2. Факториальные кольца, Теорема Гильберта о нулях

Задача 2.1. Докажите, что если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, то **(а)** $p \mid a_0$; **(б)** $q \mid a_n$; **(в)** $p - mq \mid f(m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Задача 2.2. Докажите, что определитель матрицы порядка n является неприводимым многочленом от матричных элементов (то есть $\det(x_{ij})$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x_{ij}]$).

Задача 2.3. Воспользуйтесь критерием Эйзенштейна и покажите, что плоская кривая, заданная уравнением **(а)** $y^2 = x^3 + px + q$ $(p \neq 0)$; **(б)** $xy^3 + x^2 - xy + y - 1 = 0$
не является объединением двух разных алгебрических кривых. То есть покажите, что соответствующий многочлен неприводим в $\mathbb{C}[x, y]$.

Задача 2.4. Многочлен $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ называется однородным, если он является суммой мономов фиксированной степени. Идеал $\mathfrak{a}$ называется однородным, если он порожден некоторым набором однородных элементов.

(а) Доказать, что идеал $\mathfrak{a}$ однороден тогда и только тогда, когда вместе с любым его элементом он содержит и все его однородные составляющие (суммы мономов фиксированной степени).

(б) Докажите, что неприводимые множители однородного многочлена однородны, (можно начать со случая $n = 2$.)

Задача 2.5. Пусть $\mathfrak{a}$ – неединичный идеал в $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Докажите, что множество нулей идеала $\mathfrak{a}$ является начало координат тогда и только тогда, когда все однородные многочлены достаточно высокой степени принадлежат $\mathfrak{a}$.

Задача 2.6. Какие из следующих колец являются факториальными?

(а) $\mathbb{Z}[x]$, **(б)** $\mathbb{Q}[x, y]/(x^3 - 2)$, **(в)** $\mathbb{Z}[1/N]$, **(г)** p-адические целые числа $\mathbb{Z}_p$, **(д)** $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, **(е)** $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, **(ж)** $\mathbb{Z}[[x]]$.

Семинар 3. Неприводимость и простые идеалы.

Задача 3.1. Покажите, что для любого ненулевого многочлена $f(x_1,\dots,x_n)\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ найдется такой набор чисел $a_1,\dots,a_n\in\Bbbk$, что $f(a_1,\dots,a_n)\neq 0$, при условии, что поле $\Bbbk$ бесконечно. Верен ли аналогичный факт для конечного поля $\Bbbk$.

Задача 3.2. Существует ли однородный неприводимый многочлен второй степени в
(а) $\mathbb{C}[x,y]$, **(б)** $\mathbb{C}[x,y,z]$.

Задача 3.3. Докажите, что многочлены **(а)** $x^{105}-9$, **(б)** $(x-a_1)\dots(x-a_n)-1$ неприводимы над $\mathbb{Q}$, если числа $a_1,\dots,a_n$ различны.

Задача 3.4. Опишите неприводимые компоненты алгебраических многообразий, являющихся множеством совместных нулей идеала $\mathfrak{a}$:
(а) $\mathfrak{a}:=(xy,y^3+y^2)\subset\mathbb{C}[x,y]$;
(б) $\mathfrak{a}:=(xy+yz,x^3y^3+x^2y^2)\subset\mathbb{C}[x,y,z]$.
Опишите радикал идеала $\mathfrak{a}$.

Задача 3.5. Пусть $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ – набор идеалов в коммутативном кольце R и известно, что $\mathfrak{a}_i$ – простой для $i\geqslant 2$. Докажите, что если идеал I содержится в объединении $\cup_{i=1}^n\mathfrak{a}_i$, то $\exists k$, такое что $I\subset\mathfrak{a}_k$.
Указание: Воспользуйтесь индукцией по n, выбрав элемент $a_1\dots a_{n-1}+a_n$, для которого $a_j\in I\setminus\cup_{i\neq j}\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$.
Данное утверждение называется *теоремой об избегании простых идеалов.*

Семинар 4. Алгебраичекие числа и расширения полей

Задача 4.1. Найти минимальные многочлены для элементов:
(а) $5+3i$ над $\mathbb{R}$; **(б)** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}$;
(в) $1+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$; **(г)** $1+\sqrt[3]{3}$ над $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{5}]$;

Задача 4.2. Число $\alpha\in\mathbb{C}$ называется целым алгебраическим, если оно является корнем приведенного многочлена с целыми коэффициентами. Какие из следующих элементов являются целыми алгебраическими:
(а) $i+\sqrt[3]{2}$, **(б)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, **(в)** $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.
Воспользуйтесь леммой Гаусса и покажите, что алгебраическое число α является целым алгебраическим если и только если его минимальный многочлен имеет целые коэффициенты.

Задача 4.3. Докажите, что для цепочки расширений полей $\Bbbk\subset\mathbb{F}\subset\mathbb{L}$ выполнено $\operatorname{tr.deg}(\mathbb{L}/\Bbbk)=\operatorname{tr.deg}(\mathbb{L}/\mathbb{F})+\operatorname{tr.deg}(\mathbb{F}/\Bbbk)$.

Задача 4.4. Известно, что алгебраическое число α принадлежит расширению $\mathbb{L}/\Bbbk$, такому что $[\mathbb{L}:\Bbbk]$ – нечетно. Докажите, что степени минимальных многочленов для α и для α^2 совпадают.

Задача 4.5. Докажите для простого числа p, что многочлен $f(x)\in\Bbbk[x]$ неприводим или имеет корень в $\Bbbk$, если
(а) $f(x)=x^p-a\in\Bbbk[x]$;
(б) $f(x)=x^p-x-a$, но при условии, что характеристика поля $\Bbbk$ равна p.
Указание: рассмотрите расширение $\Bbbk(\alpha)/\Bbbk$, где α – корень многочлена.

Семинар 5. Конечные поля

Задача 5.1. Докажите, что для заданного числа N в поле $\Bbbk$ или нет примитивных корней из 1 степени N, или их число равно значению функции Эйлера $\varphi(N)$.

Задача 5.2. Пусть p – простое. Для каких натуральных m и n
(а) существует гомоморфизм полей $\mathbb{F}_{p^m}\to\mathbb{F}_{p^n}$.
(б) число p^n-1 делится на p^m-1.

Задача 5.3. Пусть $f(x)\in\mathbb{F}_q[x]$ – неприводимый многочлен степени d. Докажите, что
(а) $f(x)$ имеет корень в $\mathbb{F}_{q^d}$;

(б) если $f(x)$ имеет корень в $\mathbb{F}_{q^n}$, то он раскладывается на линейные множители;

(в) $f(x)$ делит многочлен $x^{q^d} - x$.

Задача 5.4.

(а) Докажите, что отображение $a \mapsto a^p$ является автоморфизмом конечного поля характеристики p (называемое автоморфизмом Фробениуса); Каков порядок автоморфизма Фробениуса?

(б)* Докажите, что любой автоморфизм конечного поля $\mathbb{F}_{p^n}$ является степенью автоморфизма Фробениуса, тем самым $Aut(\mathbb{F}_{p^n}) = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.

(в) Опишите подмножество элементов инвариантных относительно некоторой заданной степени автоморфизма Фробениуса и убедитесь, что это подполе в $\mathbb{F}_{p^n}$. Более того, любое подполе в $\mathbb{F}_{p^n}$ может быть представлено таким образом.

Тем самым, имеется биекция между подполями в $\mathbb{F}_{p^n}$ и подгруппами в $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) = Aut(\mathbb{F}_{p^n})$.

Задача 5.5. Пусть $\mathbb{F} := \cup_{n\geqslant 1}\mathbb{F}_{p^{n!}}$ объединение возрастающей цепочки вложенных полей. Докажите, что **(а)** $\mathbb{F}$ – поле, **(б)** Любой многочлен над $\mathbb{F}_p$ разложим на линейные множители над $\mathbb{F}$;

(в) $\mathbb{F}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$.

Семинар 6. Тензорное произведение расширений

Определение 6.1. *Будем говорить, что коммутативное кольцо R – артиново, если оно является конечномерной алгеброй над полем.*

Артиново кольцо (алгебра) называется полупростым, если оно изоморфно прямой сумме полей.

Задача 6.1. Пусть $p_1(t),\ldots, p_n(t)$ – набор попарно различных неприводимых многочленов с коэффициентами в поле $\Bbbk$. Покажите, что $\Bbbk$-алгебра $A := \Bbbk[t]/(p_1 \ldots p_n)$ полупроста и содержит n идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$, таких что $Ae_i \simeq \Bbbk[t]/(p_i)$.

Задача 6.2. Докажите, что любой простой идеал в артиновом кольце максимален.

Задача 6.3. Идемпотент e в артиновом кольце A называется разложимым, если он представляется в виде суммы двух ненулевых идемпотентов. Докажите, что eA – поле, если и только если e – неразложимый идемпотент полупростого артинова кольца A.

Задача 6.4. Известно, что многочлен $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ не имеет кратных корней. Покажите, что $\mathbb{Q}[t]/(f(t))\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\oplus s} \oplus \mathbb{C}^{\oplus t}$ является полупростой алгеброй. Как понять, чему равны числа s и t, если вы знаете корни $f(t)$?

Задача 6.5. Разложите в прямую сумму полей:

(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; **(б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3})$; **(в)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$;

(г) $\mathbb{F}_{p^2} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^2}$; **(д)** $\mathbb{F}_{p^2} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^3}$.

Семинар 7. Расширения сепарабельные и Галуа

Задача 7.1. Известно, что расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ и $\mathbb{L}/\Bbbk$ – сепарабельные. Покажите, что алгебра $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{L}$ – полупроста.

Задача 7.2. Докажите, что неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ имеет кратный корень если и только если $\mathsf{char}\mathbb{F} = p > 0$ и найдется такой многочлен $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, такой что $f(x) = g(x^p)$.

Задача 7.3. Покажите, что расширение $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ является расширением Галуа и найдите группу Галуа этого расширения для:

(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; **(б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Задача 7.4. Найдите группу Галуа поля разложения многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$:

(а) $f(x) = x^3 - 2$; **(б)** $f(x) = x^4 - 2$; **(в)** $f(x) = x^n - 1$; **(г)*** $f(x) = x^p - 2$.

Задача 7.5. Покажите, что поле разложения многочлена

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 \in \mathbb{F}(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

является расширением Галуа над полем рациональных функций от n переменных $\mathbb{F}(a_0, \ldots, a_{n-1})$, группа Галуа которого совпадает с симметрической $\mathbb{S}_n$.

Указание: Воспользуйтесь основной теоремой о симметрических функциях.

Семинар 8. Соответствие Галуа

Задача 8.1. Вычислите степень минимального многочлена над $\mathbb{Q}$ у следующих чисел

(а) $\sqrt{p_1}+\ldots+\sqrt{p_k}$, где $p_1,\ldots,p_k$ попарно взаимнопростые числа большие 1 и свободные от квадратов;

(б) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$;

(в) $\xi+\bar{\xi}$, где ξ – примитивный корень 11-ой степени из единицы.

Задача 8.2. Известно, что для многочлена $f(x)\in\Bbbk[x]$ степени n степень расширения поля разложения $\Bbbk_f/\Bbbk$ равна $n!$. Докажите, что $f(x)$ – неприводимый, $\Bbbk_f/\Bbbk$ – расширение Галуа и вычислите его группу Галуа.

Задача 8.3. Предъявите расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$, группа Галуа которых равна

(а) $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, **(б)** $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$, **(в)** S_3, **(г)** A_4, **(д)** D_4.

Задача 8.4. Пусть $\mathbb{L}$ – конечное расширение Галуа поля $\mathbb{R}$, содержащее $\mathbb{C}$. Докажите,

(а) что у поля $\mathbb{R}$ не бывает расширений нечётной степени;

Указание: Воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении из анализа и покажите, что над $\mathbb{R}$ не бывает неприводимых многочленов нечётной степени;

(б) что расширение $\mathbb{L}/\mathbb{C}$ – расширение Галуа степени 2^n;

(в) основную теорему Алгебры, то есть, что поле $\mathbb{C}$ – алгебраически замкнуто.

Указание: покажите явно, что поле $\mathbb{C}$ не имеет квадратичных расширений.

Задача 8.5. Пусть $\mathbb{F}/\Bbbk$ – расширение Галуа с группой Галуа G и $H\subset G$ – некоторая её подгруппа.

(а) Покажите, что сопоставление $x\mapsto \mathrm{Tr}(L_x)$ (след оператора L_x умножения слева на элемент x) задаёт $\mathbb{F}^H$-линейное сюрьективное отображение $\mathrm{Tr}:\mathbb{F}\to\mathbb{F}^H$;

(б) Если $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – базис $\mathbb{F}/\Bbbk$, то $\mathrm{Tr}(\alpha_1),\ldots,\mathrm{Tr}(\alpha_n)$ порождают $\mathbb{F}^H$.

Семинар 9. Вычисление групп Галуа

Задача 9.1. Докажите, что сепарабельный многочлен $f(x)\in\Bbbk[x]$ является неприводимым если и только если его группа Галуа $\mathsf{Gal}(\Bbbk_f/\Bbbk)$ действует транзитивно на его корнях.

Задача 9.2. Пусть $\mathbb{L}:=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $\mathbb{F}:=\mathbb{L}(\sqrt{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{3}+3)})$. Докажите, что

(а) $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа и вычислите его группу Галуа.

(б) $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа и группа Галуа $\mathsf{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{Q})$ изоморфна группе кватернионов.

Задача 9.3. Докажите, что порядок группы $\Bbbk$-линейных автоморфизмов конечного расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ делит степень расширения $[\mathbb{F}:\Bbbk]$.

Задача 9.4. Вычислите группу Галуа расширений

(а) $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{17})/\mathbb{Q}$, **(б)** $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{15})/\mathbb{Q}$.

Задача 9.5. Покажите, что для поля $\Bbbk$ характеристики p, расширение построенное путем присоединения корня многочлена x^p-x-a является расширением Галуа с циклической группой Галуа.

Указание: Вспомните, что многочлен x^p-x-a или имеет корень или неприводим и опишите множество его корней.

Семинар 10. Целые алгебраические и не только

Задача 10.1. Пусть $\mathbb{F}:=\Bbbk(\alpha)$ – примитивное расширение, порожденное элементом α. Пусть $\Bbbk\subset\mathbb{L}\subset\mathbb{F}$ – промежуточное поле. Рассмотрим минимальный многочлен для α над полем $\mathbb{L}$:

$$x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0\in\mathbb{L}[x].$$

Докажите, что $\mathbb{L}$ совпадает с полем $\Bbbk[a_0,\ldots,a_{n-1}]$. Выведите отсюда, что число промежуточных подполей в конечном примитивном расширении конечно.

Задача 10.2. Для бесконечного поля $\Bbbk$ характеристики p предъявите в конечном расширении $\Bbbk(x,y)/\Bbbk(x^p, y^p$ бесконечное количество промежуточных подполей и докажите, что рассмотренное расширение не примитивно.

Задача 10.3. Пусть G – конечная абелева группа. Докажите, что найдется
(а) натуральное число N и сюрьективный гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})^* \twoheadrightarrow G$;
(б) расширение Галуа $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ с группой Галуа G.

Задача 10.4. Пусть $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{p})$ – примитивный корень из единицы простой степени p.
(а) Опишите форму следа для расширения $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ и вычислите её определитель;
(б)** Докажите, что кольцо целых в этом расширении порождено ξ.

Задача 10.5. Опишите кольцо целых алгебраических для квадратичного расширения
(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$, **(б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{7})/\mathbb{Q}$.

Семинар 11. Приложения к теории представлений

Задача 11.1. Пусть $\mathbb{F}/\Bbbk$ – расширение Галуа с группой Галуа G. С каждым элементом g группы G свяжем $\mathbb{F}$-линейный эндоморфизм $\lambda_g : \mathbb{F} \otimes_\Bbbk \mathbb{F} \to \mathbb{F} \otimes_\Bbbk \mathbb{F}$ сопоставляющий разложимому тензору $a \otimes b \mapsto a \otimes g(b)$.

Докажите, что
(а) сопоставление $g \mapsto \lambda_g$ задаёт $\mathbb{F}$-линейное действие группы G на $\mathbb{F} \otimes_\Bbbk \mathbb{F}$;
(б) композиции λ_g и произведения $\mu : \mathbb{F} \otimes_\Bbbk \mathbb{F} \xrightarrow{a\otimes b \mapsto ab} \mathbb{F}$ образуют базис в пространстве функционалов $Hom_\mathbb{F}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}, \mathbb{F})$;
(в) отображение $\mathbb{F} \otimes_\Bbbk \mathbb{F} \to \mathbb{F}[G]$ сопоставляющее тензору v сумму $\sum_g \mu(\lambda_g(v))g^{-1}$ является изоморфизмом G-модулей.

Задача 11.2. Докажите, что для любой конечной группы G существует конечное расширение $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$, такое что для любого конечномерного комплексного представления группы G существует базис, в котором все матричные элементы принадлежат $\mathbb{F}$.

Задача 11.3. Вычислите размерности всех неприводимых комплексных представлений неабелевой группы G порядка **(а)** p^3, где p – простое; **(б)** 147.

Семинар 12. Полупростые алгебры

Задача 12.1. Выясните, является ли кольцо полупростым и опишите неприводимые модули над ним, если оно полупростое
(а) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + px + q)$ (в зависимости от p и q);
(б) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (в зависимости от n);
(в) $Mat_N(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$,
(г) кольцо верхнетреугольных матриц над полем;
(д) кольцо матриц над полем, коммутирующих с данной матрицей (в зависимости от ее фробениусовой формы).

Задача 12.2. Опишите неприводимые представления групп Q_8 и S_3 над полем $\Bbbk$ и разложите групповые алгебры $\Bbbk Q_8$ и $\Bbbk S_3$ в прямую сумму простых.
(а) $\Bbbk = \mathbb{C}$; **(б)** $\Bbbk = \mathbb{R}$; **(в)*** $\Bbbk = \mathbb{Q}$.

Задача 12.3. Докажите, что существует единственное тело (конечномерная алгебра с делением) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

Задача 12.4. Пусть D – конечномерная алгебра с делением над полем $\Bbbk$ характеристики 0. Покажите, что форма $\langle a, b\rangle := \mathsf{Tr}(L_{ab})$ на $\Bbbk$-алгебре **(а)** D, **(б)** $Mat_n(D)$ невырождена. Как всегда, L_a – обозначает оператор умножения слева на a.

Задача 12.5. Алгеброй Клиффорда $Cl_\Bbbk(V, q)$, связанной с квадратичной формой $q()$ на векторном пространстве V поля (нулевой характеристики) $\Bbbk$ называется факторалгебра свободной тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу порожденному соотношениями $v \otimes v - q(v)$.

(а) Покажите, что для $V = W \oplus W^*$ и формы $q((w,\psi)) := \psi(w)$ внешнее умножение на векторы из W и свертка тензоров с функционалами из W^* продолжаются до действия алгебры $Cl_{\Bbbk}(V,q)$ в пространстве кососимметричных тензоров $\Lambda(W)$.

(б) Докажите, что данное представление неприводимо и что $Cl_{\mathbb{C}}(V,q)$ изоморфна матричной алгебре от $\Lambda(W)$. В частности, вычислите $\dim_{\mathbb{C}}(Cl_{\mathbb{C}}(V,q))$.

(в)* Покажите, что если форма q – невырождена, то алгебра Клиффорда $Cl_{\mathbb{C}}(V,q)$ полупроста. Разберите отдельно случай четномерного и нечетномерного пространств V. Опишите изоморфизм с суммой матричных над $\mathbb{C}$, описав все неприводимые представления.

Указание: Если $\dim V = 2k+1$, то неприводимых представлений у $Cl_{\mathbb{C}}(V,q)$ два. Что это за представления?

Семинар 13. Полупростые и центральные простые алгебры

Задача 13.1. Пусть $V_1,\ldots,V_n$ – набор попарно неизоморфных комплексных неприводимых представлений конечномерной алгебры A. Докажите, что неравенство $\sum \dim_{\mathbb{C}} V_i^2 \geqslant \dim_{\mathbb{C}} A$ влечет полупростоту алгебры A.

Задача 13.2. Алгебра H порождена образующими x, y с соотношениями $xy = \omega yx$ (где ω – примитивный кубический корень из единицы) и $x^3 = 1$, $y^3 = 1$. Докажите, что эта алгебра полупроста и разложите ее в прямую сумму матричных (основное поле равно $\mathbb{C}$).

Задача 13.3. Алгебра $D(\alpha,\beta)$ над полем $\Bbbk$ характеристики отличной от 2 порождена образующими i, j с соотношениями $ij = -ji$ и $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$. Докажите, что

(а) $D(\alpha,\beta)$ – является центральной простой алгеброй над $\Bbbk$ с базисом $1, i, j, ij$;

(б) $D(\alpha,\beta) \simeq Mat_2(\Bbbk)$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta t^2 = 0$ имеет ненулевое решение в $\Bbbk$.

(в) имеют место изоморфизмы

$$D(\alpha,\beta) \otimes_{\Bbbk} D(\alpha',\beta) \simeq Mat_2(D(\alpha\alpha',\beta)),$$
$$D(\alpha,\beta) \otimes_{\Bbbk} D(\alpha,\beta) \simeq Mat_4(\Bbbk).$$

Задача 13.4. Зафиксируем конечную группу G.

(а) Опишите матрицу $L(x)$ оператора действия умножения слева на элемент $\sum_{g\in G} x_g g$ в групповой алгебре $\mathbb{F}[G]$, где в качестве основного поля $\mathbb{F}$ взяты рациональные функции $\mathbb{C}(x_g | g \in G)$ от набора формальных переменных $\{x_g\}$, занумерованных элементами группы G.

(б) Докажите, что определитель $L(x)$ равен определителю матрицы $|x_{gh}|_{g,h\in G}$.

(в) Докажите, что если $V_1,\ldots,V_k$ список неприводимых комплексных представлений группы G, то многочлен $\det|x_{gh}|$ раскладывается в произведение $\prod_{i=1}^k (p_i(x_g))^{\dim V_i}$, где степень $\deg p_i = \dim V_i$.

(г) Вычислите p_i для случая $G = S_3$; **(д)** Докажите, что p_i – неприводим для любого $i = 1,\ldots,k$.