

Доп. главы топологии. Листок 3 (к лекциям 5, 6).

Крайний срок 30 ноября. Загружать решения можно сюда

Задача 1. Пусть Π_n — чум неупорядоченных разбиений множества $[n]$. Например, элементами Π_4 являются штуки вида $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$ или $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Порядок вводится по измельчению разбиения. В чуме Π_n есть наибольший элемент $\hat{1} = \{[n]\}$ и наименьший элемент $\hat{0} = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$. Докажите, что $|\Pi_n \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}|$ гомотопически эквивалентна букету сфер размерности $n - 3$.

Указание: заметьте, что Π_n — это чум пересечений для диагональной конфигурации A_n гиперплоскостей $\{V_{ij} \subset \mathbb{R}^n\}$, $V_{ij} = \{x_i = x_j\}$. Решите упр.6 из прошлого листка.

Задача 2. Используя теорему Квиллена о слое, докажите, что комплекс несвязных графов Dis_n гомотопически эквивалентен чуму $\Pi_n \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ из предыдущей задачи.

Задача 3. Докажите (любым способом), что $|\Pi_n \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}| \simeq \text{Dis}_n$ гомотопически эквивалентен букету ровно $(n - 1)!$ сфер.

Комментарий по пройденному. Лекция 5. Говорили про простую гомотопическую эквивалентность (ничего кроме определения не было, а подробности можно найти в [2]). Потом общие слова про обычную теорию Морса, см. [4]. **Лекция 6.** Дискретная теория Морса (ДТМ). Можно посмотреть в оригинальной статье Формана [3], который ДТМ изобрел. Разобранный пример с комплексом несвязных графов взят из 2-ой лекции Гаянэ Паниной в Дубне [6]. Чуть больше конкретных (но, на мой взгляд, менее интересных) примеров можно найти в [7]. Учебные задачи на ДТМ я не смог придумать — во всех нужно занудно проверять ацикличность спаривания, а это работа неблагодарная. Если хотите посмотреть на какие-нибудь приложения ДТМ, то (помимо ссылок с википедии) можете посмотреть [1] и [5]. Работа Паниной и ее коллег [5] интересна тем, что там рассматриваемое пространство не гомотопно букету сфер, но его числа Бетти все равно можно посчитать с помощью ДТМ.

Список литературы

- [1] Djordje Baralic, Jelena Grbic, Aleksandar Vucic, *Universal simplicial complexes inspired by toric topology*, arXiv:1708.09565
- [2] M. Cohen. A course in simple homotopy theory. 1973.
- [3] R. Forman, *Morse Theory for Cell Complexes*, Advances in Mathematics 134 (1998), 90–145.
- [4] Дж. Милнор. Теория Морса. 2011.
- [5] I. Nekrasov, G. Panina, A. Zhukova, *Cyclopermutohedron: geometry and topology*, arXiv:1602.00471
- [6] Г. Панина, *Дискретная теория Морса*, Лекции в Дубне 2018 link
- [7] R. Zah, *Simplifying Complicated Simplicial Complexes: Discrete Morse Theory and its Applications*, link.