Доп.главы топологии. ЭКЗАМЕН.
И информация к лекциям 10-13.

Крайний срок 27 декабря. Загружать решения можно сюда

Если вы используете в решении результат какой-то другой задачи из листков, то решение последней тоже должно быть написано (или вы отправляли его ранее — нужно отметить этот факт, если нет — решить сейчас).

Задача 1. [2 балла] Пусть K — шеллинговый комплекс, а h_r — количество симплексов максимальной размерности в его шеллинге, которые были приклеены по объединению r своих гиперграней. Докажите, что числа h_r не зависят от выбора шеллинга (хотя, конечно, зависят от K).

Задача 2. [2 балла] Докажите, что удаление upbeats и downbeats не меняет простой гомотопический тип чума. В частности, геометрическая реализация конечного чума просто гомотопически эквивалентна геометрической реализации его ядра.

Задача 3. а) [2 балла] Пусть Π_n — чум неупорядоченных разбиений множества $[n]$, а Dis_n — комплекс несвязных графов на n вершинах (см. листок 3). Докажите, что ядро чума $\mathrm{Dis}_n \setminus\{\varnothing\}$ изоморфно $\Pi_n\setminus\{\hat{0},\hat{1}\}$.

б) [3 балла] Пусть P — ограниченный выпуклый многогранник, а $\mathcal{P}$ — чум его собственных граней, то есть непустых, и не совпадающих со всем P, а V — множество вершин. Рассмотрим симплициальный комплекс $L(P)$ на множестве вершин V: скажем, что $\{i_1,\dots,i_s\}\in L(P)$, если эти вершины принадлежат одной гиперграни многогранника P. Таким образом, если P симплициальный многогранник, то $L(P)$ попросту совпадает с его границей. В общем случае докажите, что ядро чума $L(P)\setminus\{\varnothing\}$ изоморфно $\mathcal{P}$.

Задача 4. Расширения симплициальных комплексов. Пусть K симплициальный комплекс на множестве V и пусть каждой вершине $i\in V$ приписана некоторая положительная кратность $m(i)$. Рассмотрим новый симплициальный комплекс K_m, вершины которого имеют вид (i,c_i), где $i\in V$, $c_i\in\{1,\dots,m(i)\}$, а симплексы задаются условием

$$\{(i_1,c_{i_1}),\dots,(i_s,c_{i_s})\}\in K_m \Leftrightarrow \{i_1,\dots,i_s\}\in K$$

и среди $i_1,\dots,i_s$ нет повторов (размножили каждую вершину, а потом натянули на копии симплексы как в комплексе K).

а) [2 балла] Пусть Δ^n — n-мерный симплекс. Докажите, что Δ^n_m гомотопически эквивалентен букету n-мерных сфер. Найдите число $N(m)$ сфер в букете.

б) [3 балла] Докажите, что для произвольного связного K имеется гомотопическая эквивалентность

$$|K_m|\simeq|K|\vee\bigvee_{I\in K\setminus\{\varnothing\}}(\Sigma^{\dim I}|\operatorname{lk}_K I|)^{\vee N(m|_I)}$$

(запись $X^{\vee k}$ означает букет k копий пространства X).

Задача 5. Пусть $R \subseteq A \times B$ бинарное отношение на паре множеств. Напомним, что для него определены комплексы Даукера $\mathrm{Dowk}(R, A)$ и $\mathrm{Dowk}(R, B)$ и на первой лекции мы доказали, что они гомотопически эквивалентны. Рассмотрим еще одну конструкцию из другой области.

Будем называть бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ *формальным контекстом*. Для подмножества $S \subseteq A$ определим

$$S' = \{b \in B \mid aRb \ \forall a \in S\}$$

и аналогично, для $T \subseteq B$ определим

$$T' = \{a \in A \mid aRb \ \forall b \in T\}$$

Пара (S, T) называется *формальным понятием*, если $S' = T$ и $T' = S$. Формальные понятия образуют чум $\mathcal{S}_R$: мы скажем, что $(S_1, T_1) < (S_2, T_2)$, если $S_1 \subset S_2$ (эквивалентно, $T_1 \supset T_2$). Этот чум называется *решеткой формальных понятий*, в нем есть наименьший элемент $\hat{0} = (\varnothing, B)$ и наибольший элемент $\hat{1} = (A, \varnothing)$.

Мы надеемся, что написанные слова звучат достаточно интригующе, чтобы вы самостоятельно загуглили их смысл в математике, логике и анализе данных. А задача такова. Допустим, что оба комплекса $\mathrm{Dowk}(R, A)$ и $\mathrm{Dowk}(R, B)$ не являются полными симплексами.

а) [3 балла] Докажите, что геометрическая реализация $|\mathcal{S}_R \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\}|$ гомотопически эквивалентна комплексам Даукера $|\mathrm{Dowk}(R, A)|$ и $|\mathrm{Dowk}(R, B)|$.

б) [2 балла] Докажите, что $\mathcal{S}_R \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\}$ получается из чума $\mathrm{Dowk}(R, A) \backslash \{\varnothing\}$ удалением upbeats (и, аналогично, множество с обращенным порядком $\mathcal{S}_R^* \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\}$ получается из $\mathrm{Dowk}(R, B) \backslash \{\varnothing\}$ удалением upbeats).

Отсюда и из задачи 2 следует, что комплексы Даукера просто гомотопически эквивалентны.

Комментарий по пройденному. **Лекция 10** была про шеллинги и матроиды. Общее про шеллинги симплициальных комплексов и их гомотопический тип [**4**]. Брюгессер и Мани про шеллинговость границ выпуклых многогранников [**7**]. Про нечистую версию шеллинговости и Коэн-Маколеевости [**6**]. Про связь матроидной теории с шеллинговостью [**5**].

Последние 3 лекции (11-13) были про конечные топологические пространства. **Лекция 11.** Про топологии Александрова положено ссылаться на [**1**], но там на немецком. В этой же работе Александрова вводится понятие порядкового комплекса чума. Теоремы МакКорда о связи конечных топологий и порядковых комплексов см. [**10**]. **Лекция 12.** Гомотопическая наука про конечные пространства и понятие ядра чума (или конечной топологии) есть у Стонга [**12**]. Редукция Осаки [**11**]. Более современные обзоры — см. Бармака [**3**] и Мэя [**9**]. **Лекция 13.** Про гомологическую алгебру пучков на конечных чумах, как мне кажется, хорошо написано у Карри [**8**]. Его окружение продвигает использование таких пучков в прикладной топологии, поэтому там относительно простыми словами написаны некоторые вещи, но есть ссылки и на более серьезные источники. Гомологические аргументы и рассуждения, замятые на последней лекции, я накидал в текст [**2**]. Там же я попытался объяснить, почему слой отображения чумов так называется, и как с помощью конечных пространств увидеть параллели между теоремами Смейла и Квиллена из начала курса.

Список литературы

[1] P. Alexandroff, *Diskrete Räume*, Mat. Sb. (N.S.) 2 (1937), 501-518.

[2] А. Айзенберг, *Гомологии конечных пространств*, link.

[3] J. A. Barmak, Algebraic topology of finite topological spaces and applications. Lecture Notes in Mathematics 2032, Springer, 2011.

[4] A. Björner, Some combinatorial and algebraic properties of Coxeter complexes and Tits buildings, Advances in Mathematics 52:3 (1984), 173–212.

[5] A. Björner, Homology and Shellability of Matroids and Geometric Lattices. A chapter for "Matroid Applications".

[6] A. Björner, M. Wachs, V. Welker, On sequentially Cohen-Macaulay complexes and posets, Isr. J. Math. 169 (2009), 295–316.

[7] H. Bruggesser, P. Mani, Shellable Decompositions of Cells and Spheres. Mathematica Scandinavica, 29 (1971), 197–205.

[8] J. M. Curry, *Sheaves, Cosheaves and Applications*, preprint arXiv:1303.3255v2

[9] J. P. May, *Finite spaces and larger contexts*, available online

[10] M. C. McCord, *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math.J. 33 (1966), 465–474.

[11] T. Osaki, *Reduction of finite topological spaces*, Interdisciplinary Information Sciences 5:2 (1999), 149–155.

[12] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 123(1966), 325–340.