ЭКЗАМЕН 22–28 ФЕВРАЛЯ 2021 Г.

. Работы присылайте Ю.М.Бурману (burman@mccme.ru) до 24.00 28 февраля 2021 года. Формат произвольный (например, TEX+ pdf. Или напишите на бумаге и сфотографируйте).

Задача 1. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{F}^4$ — стандартный базис, $\ell_1, \dots, \ell_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (целые неотрицательные числа). Обозначим $G(\ell_1, \dots, \ell_4)$ множество векторных подпространств $V \subset \mathbb{F}^4$ таких, что $\dim(V \cap \langle e_1 \rangle) = \ell_1, \dim(V \cap \langle e_1, e_2 \rangle) = \ell_2, \dim(V \cap \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) = \ell_3, \dim(V \cap \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle) = \ell_4$. а) При каких значениях $\ell_1, \dots, \ell_4$ множество $G(\ell_1, \dots, \ell_4)$ непусто? б) Пусть поле $\mathbb{F}$ конечно и состоит из q элементов. Найдите количество элементов (подпространств) в $G(\ell_1, \dots, \ell_4)$ для всех $\ell_1, \dots, \ell_4$.

Задача 2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, при этом $AC_1/AB = x$, $BA_1/BC = y$, $CA_1/CB = z$. На сторонах A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отмечены точки $A_2 = [AA_1] \cap [B_1C_1]$, $B_2 = [BB_1] \cap [A_1C_1]$ и $C_2 = [CC_1] \cap [A_1B_1]$, на сторонах A_2B_2, B_2C_2 и A_2C_2 треугольника $A_2B_2C_2$ — точки $A_3 = [AA_2] \cap [B_2C_2]$, $B_3 = [BB_2] \cap [A_2C_2]$ и $C_3 = [CC_2] \cap [A_2B_2]$, и так далее. а) Найдите предел $\lim_{n\to\infty} S(A_nB_nC_n)/S(ABC)$ (где S — площадь). б) С какой скоростью последовательность $S(A_nB_nC_n)$ сходится к своему пределу?

Задача 3. a_1, a_2, a_3, a_4 — точки на проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а ℓ — прямая, не проходящая через эти точки. Для произвольной точки $b \in \ell$ пусть $Q(b)$ — проективная коника, проходящая через точки $a_1, \dots, a_4$ и b, а $f(b) \in \ell$ — вторая (кроме b) точка пересечения $Q(b)$ и ℓ. а) Докажите, что коника $Q(b)$ для всякой точки b существует и единственна. б) Докажите, что отображение $f : \ell \to \ell$ — проективное.

Задача 4. Пусть $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимые векторы. *Кубоидом* $K(v_1, \dots, v_n)$ называется выпуклая оболочка векторов $v_1, -v_1, \dots, v_n, -v_n$. Обозначим c_n наименьшее число, обладающее таким свойством: для любого замкнутого выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, не лежащего ни в каком собственном линейном подпространстве $\mathbb{R}^n$ и такого, что $-A = A$, найдется кубоид K такой, что $K \subset A \subset c_nK$. а) Докажите, что $c_n \leq n$. б) Найдите c_n.

Указание. Символом tX обозначается множество $\{tv \mid v \in X\}$.

Задача 5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — открытый круг единичного радиуса с центром в начале координат, ω — его граница (окружность). Для двух точек $a, b \in \Omega$ обозначим $d(a, b) = |\ln[p, a, b, q]| \stackrel{\text{def}}{=} |\ln \frac{bp\cdot aq}{bq\cdot ap}|$, где $p, q \in \omega$ — точки пересечения ω и прямой ab, а квадратные скобки означают двойное отношение точек на прямой. а) Докажите, что d — метрика в Ω. б) Докажите, что для любой точки $a \in \Omega$ существует отображение $f : \Omega \to \Omega$, сохраняющее метрику d и переводящее a в центр круга 0. в) Пусть $a, b \in \Omega$, $d(a, 0) = x$, $d(b, 0) = y$ и угол $a0b$ — прямой (в обычном смысле). Найдите $d(a, b)$.