ЛЕКЦИЯ 1

Аннотация. Векторные и аффинные пространства.

1. Что такое вектор. Сложение векторов и умножение их на числа.

Школьный курс анализа содержит несколько определений понятия вектора и операций сложения векторов и умножения их на число:

(1) (векторы, приложенные к точке O) Зафиксируем на плоскости или в пространстве точку O. Тогда вектором называется, фактически, просто точка A плоскости или пространства — точнее, пара точек OA, где первая точка — всегда O. При этом суммой векторов OA и OB называется вектор OC такой, что $OACB$ — параллелограмм, а произведением вектора OA на число t называется вектор OB, где B — точка на прямой OA такая, что $|OB| = |t|\ |OA|$, а лучи OA и OB сонаправлены, если $t > 0$, и противоположно направлены, если $t < 0$ (это определение работает и на плоскости, и в пространстве).

(2) (свободные векторы) Вектор — пара A, B точек на плоскости или в пространстве, при этом пары A, B и C, D задают один и тот же вектор, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены, а расстояния $|AB|$ и $|CD|$ равны. При этом суммой векторов AB и CD называется вектор AE, где E — такая точка, что векторы BE и CD равны. Произведение вектора AB на число t определяется примерно так же, как для приложенных векторов: это вектор AF, где F — точка на прямой AB такая, что $|AF| = |t|\ |AB|$, а лучи AB и AF сонаправлены, если $t > 0$, и противоположно направлены, если $t < 0$.

(3) (вектор — параллельный перенос) Вектор — преобразование плоскости или пространства (параллельный перенос) $T : \Pi \to \Pi$, сохраняющее расстояние (то есть $|AB| = |T(A)T(B)|$ для любых двух точек A и B) и переводящее каждую прямую в параллельную. Сложение векторов T_1 и T_2 — композиция преобразований (то есть последовательное их выполнение: $(T_1 + T_2)(A) = T_1(T_2(A))$ — точка A переходит в точку, в которую преобразование T_1 переводит образ точки A при преобразовании T_2). Произведение вектора T на число t — преобразование tT, переводящее точку A в точку B такую, что расстояние $|AB| = |t|\ |AT(A)|$, а лучи $[AT(A))$ и $[AB)$ сонаправлены при $t > 0$ и противоположно направлены, если $t < 0$.

(4) Вектор — пара (для плоских векторов) (x_1, x_2) или тройка (x_1, x_2, x_3) (для векторов в пространстве) действительных чисел $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Сложение векторов и умножение их на число производятся почленно: $(x_1, x_2)+(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ и $t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2)$ (и аналогично для пространственных векторов). Множество таких векторов часто обозначают $\mathbb{R}^2$ или, соответственно, $\mathbb{R}^3$.

На самом деле три определения задают одно и то же понятие — между векторами в смысле этих определений можно установить взаимно однозначное соответствие, причем это соответствие будет переводить сумму в сумму и вектор, умноженный на число, в вектор (в смысле другого определения), умноженный (тоже в другом смысле!) на то же самое число. Вот эти соответствия; временно будем называть векторы в смысле четырех определений “вектор-1”, . . . , “вектор-4”.

Вектор-1 $\Leftrightarrow$ вектор-2. Вектору-1 OA сопоставляется он же, но уже как вектор-2. Обратно, вектору-2 AB сопоставляется вектор-1 OC такой, что OC и AB равны как векторы-2. Если $OACB$ — параллелограмм, то векторы-2 OB и AC равны — следовательно, сумме векторов-1 OA и OB соответствует вектор-2 OC, равный сумме векторов-2 OA и OB. Умножение на число векторов-1 и векторов-2 тоже согласовано — проверку этого (несложную) мы оставим читателю.

Вектор-2 $\Leftrightarrow$ вектор-3. Паре точек A, B (на плоскости или в пространстве, неважно) сопоставим параллельный перенос, переводящий точку A в точку B. Пусть теперь C — произвольная точка, а D — ее образ при этом параллельном переносе. Поскольку параллельный перенос переводит параллельные прямые в параллельные и сохраняет расстояние, расстояния $|AB|$ и CD равны, а прямые AC и BD параллельны. Из этого следует, что лучи $[AB)$ и $[CD)$ также сонаправлены, так что векторы-2 AB и CD равны. Тем самым равным векторам-2 сопоставляется один и тот же параллельный перенос. Обратно, каждому параллельному переносу (вектору-3) T сопоставляется вектор-2, составленный из произвольной точки A и ее образа B под действием переноса T — нетрудно проверить, что разные точки A дают равные векторы-2 AB. Из этого соответствия легко видно, что сложению векторов-3 (композиции параллельных переносов) соответствует сложение векторов-2: пусть параллельный перенос T_1 переводит точку A в точку B, а точку параллельный перенос T_2 переводит точку

B в точку C. Тогда параллельный перенос T_1+T_2 переводит точку A в точку C — а с другой стороны, вектор-2 AC равен сумме векторов-2 AB и BC.

Про согласованность умножения на число векторов-2 и векторов-3 — упражнение.

Вектор-1 $\Leftrightarrow$ вектор-4. Введем на плоскости (или в пространстве) систему координат: O — начало координат, оси ℓ_1, ℓ_2 (и ℓ_3 в пространстве). Пусть OA — вектор-1; обозначим A_1, A_2 (и A_3) проекции точки A на ось ℓ_1, ℓ_2 (и ℓ_3). Речь идет об ортогональных проекциях: прямая AA_1 перпендикулярна оси ℓ_1, и аналогично для других осей. Если луч $[OA_1)$ сонаправлен оси ℓ_1, то обозначим $x_1=|OA_1|$, а если направлен противоположно — то $x_1=-|OA_1|$. Аналогично определим число x_2 (с осью ℓ_2) и x_3, если вектор пространственный. Обратное соответствие чуть сложнее: пусть (x_1,x_2) — вектор-4. Рассмотрим точку $A_1\in\ell_1$, расстояние от которой до начала координат O равно $|x_1|$, и луч OA_1 сонаправлен оси ℓ_1, если $x_1>0$, и противоположно направлен, если $x_1<0$; аналогично $A_2\in\ell_2$. Пусть точка A — точка пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и перпендикулярных осям ℓ_1 и ℓ_2 соответственно (в случае пространственных векторов вместо двух прямых нужно брать три плоскости — разберитесь!). Тогда вектор-1 OA сопоставляется вектору-4 (x_1,x_2).

Упражнение 1. Докажите, что при описанном соответствии между векторами-1 и векторами-4 сумма переходит в сумму (если $AB\leftrightarrow(x_1,x_2)$ и $CD\leftrightarrow(y_1,y_2)$, то $AB+CD\leftrightarrow(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$) и умножение на число — в умножение на то же самое число (если $CD=tAB$, и $AB\leftrightarrow(x_1,x_2)$, то $CD\leftrightarrow t(x_1,x_2)=(tx_1,tx_2)$.

Упражнение 2. Придумайте прямое соответствие между векторами-2 и векторами-4, а также между векторами-3 и векторами-4 и проверьте, что оно переводит сумму в сумму и произведение на число в произведение на число.

Ответ. Вектору-4 (a,b) соответствует параллельный перенос T, переводящий произвольную точку с координатами (x,y) в точку с координатами $(x+a,y+b)$.

Теорема 1. *Сложение векторов и их умножение на число обладает перечисленными ниже свойствами.* (Во всех формулах $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ — произвольные векторы, s,t,u — произвольные числа. В скобках — ученые названия для этих свойств.)

(1) *(коммутативность сложения векторов)* $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.
(2) *(ассоциативность сложения векторов)* $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.
(3) *(существование нулевого вектора) Существует и единствен вектор $\vec{0}$, для которого $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$.*
(4) *(существование противоположного вектора) Для каждого вектора $\vec{x}$ существует и единствен вектор $-\vec{x}$ такой, что $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$.*
(5) *(ассоциативность умножения на число)* $t(s\vec{x})=(ts)\vec{x}$.
(6) *(дистрибутивность умножения на число относительно числа)* $t\vec{x}+s\vec{x}=(t+s)\vec{x}$.
(7) *(дистрибутивность умножения на число относительно вектора)* $t(\vec{x}+\vec{y})=t\vec{x}+t\vec{y}$.
(8) *(свойство единицы)* $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

Обратите внимание, что в свойстве 6 справа $+$ означает сложение чисел, а слева — сложение векторов.

Следствие 1. (1) $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$.
(2) $(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$.

Доказательство следствия. Над знаком равенства — номер свойства в теореме 1.

$\vec{x}+0\cdot\vec{x}\overset{8}{=}1\cdot\vec{x}+0\cdot\vec{x}\overset{6}{=}(1+0)\vec{x}=1\cdot\vec{x}\overset{8}{=}\vec{x}$. Прибавим теперь к обеим частям равенства вектор $-\vec{x}$ (существующий, согласно 4). Для левой части: $-\vec{x}+\vec{x}+0\cdot\vec{x}\overset{4}{=}\vec{0}+0\cdot\vec{x}\overset{3}{=}0\cdot\vec{x}$;, а для правой: $-\vec{x}+\vec{x}\overset{4}{=}=\vec{0}$.

$\vec{x}+(-1)\cdot\vec{x}\overset{8}{=}1\cdot\vec{x}+(-1)\cdot\vec{x}\overset{6}{=}(1+(-1))\vec{x}=0\cdot\vec{x}=\vec{0}$, как было только что доказано. Согласно утверждению о единственности в свойстве 4, $(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$. □

Доказательство теоремы 1. Если в теореме под словом "вектор" понимать "число", то все свойства, упомянутые в теореме, выполнены — это хорошо известные свойства чисел. Но тогда для векторов-4 (пар/троек чисел) эти свойства тоже выполнены, поскольку сложение и умножение на число производятся покомпонентно (иными словами, свойства выполнены тогда и только тогда, когда они выполнены для каждой из двух или трех компонент, а компоненты это числа). Но мы уже знаем, что при соответствии между векторами-1, 2, 3 и 4 сложение и умножение переходят в сложение и умножение, так что для остальных определений вектора свойства выполнены тоже. □

Из всех определений вектора последнее обладает следующими явными преимуществами. Прежде всего, с его помощью легко доказывать теорему 1; доказательства с помощью других определений были бы намного сложнее. Кроме того — и это, пожалуй, самое главное — это определение легко обобщить: почему, скажем, чисел обязательно должно быть два или три? можно рассмотреть (и назвать "n-мерными векторами") числовые последовательности $(x_1,\dots,x_n)$ произвольной (но заранее фиксированной) длины n. (Даже $n=1$ подходит!

"одномерные векторы" это просто числа.) Нетрудно видеть, что для таких векторов теорема 1 остается верной вместе с доказательством. Или вот еще: а что во всех этих определениях значит "числа"? Мы имели в виду действительные числа, но можно взять вместо них, скажем, комплексные или рациональные — получатся "комплексные векторы" (или "рациональные векторы"), для которых придумать определения типа 1, 2 или 3 будет уже совсем не так просто. (А теорема 1 и ее доказательство по-прежнему верны.)

Отступление мелким шрифтом о числах. На самом деле, если мы хотим, чтобы выполнялась теорема 1, от кандидатов на понятие "числа" требуется следующее: их должно быть можно складывать и умножать, причем для этого сложения и умножения должны быть выполнены все свойства из теоремы 1, где в под "векторами" тоже понимаются числа (некоторые из этих свойств при этом сливаются — скажем, 6 и 7 становятся одним и тем же свойством). Дополнительно к этому нужны еще два свойства, не имеющие смысла для умножения векторов на число:

(9) (коммутативность умножения) $ts = st$,

(10) (существование обратного) для всякого числа $t \neq 0$ существует и единственно число t^{-1} (обратное к t) такое, что $t \cdot t^{-1} = 1$.

Именно поэтому обычно не рассматривают "целочисленные векторы" — для целых чисел не выполнено свойство 10, и хотя для таких "векторов" теорема 1 все равно выполнена, многие утверждения, которые мы докажем позднее, выполнены не будут. Для $t = 0$ обратное число существовать не может — это противоречило бы свойству 3.

Множество, на котором определены две операции — сложения и умножения — обладающие всеми перечисленными свойствами (свойствами из теоремы 1 плюс 9 и 10), называется *полем.*

Пример 1. Самое простое поле $\mathbb{F}_2$ состоит всего из двух элементов, 0 и 1. Умножение при этом однозначно задается определением поля: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ согласно следствию 1 и $1 \cdot 1 = 1$ согласно свойству 8. Сложение также частично фиксировано: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ согласно свойству 3. Если положить $1 + 1 = 0$, то несложная проверка показывает, что получается поле. (Например, в этом поле $-0 = 0$ — на самом деле, так в любом поле — и $-1 = 1$.) n-мерные векторы над полем $\mathbb{F}_2$ представляют собой последовательности из n нулей и единиц; таких векторов конечное число (2^n).

Тем не менее, у определения 4 есть один очень существенный недостаток: взаимно однозначное соответствие между векторами-4 и более "геометрическими" векторами-1 (или векторами-3) зависит от дополнительного выбора — выбора системы координат. Если на той же плоскости (или в том же пространстве) выбрать другую систему координат, то соответствие между векторами-1 и векторами-4 все равно будет взаимно однозначным, но оно будет другим: тот же вектор-1 в другой системе координат имеет другие координаты. Поэтому, например, векторы-4 $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (соответствующие единичным отметкам на осях координат) явно "лучше" других векторов (числа 0 и 1 обладают многими уникальными свойствами), в то время как ясно, что среди векторов-1, векторов-2 и векторов-3 нет выделенных — все векторы в некотором смысле равноправны (смысл мы проясним позднее); особая роль векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ это свойство не их самих, а их расположения относительно системы координат. Тем самым определение 4 определяет не множество векторов, а множество векторов с дополнительной структурой — системой координат, что не всегда удобно.

2. Определение векторного и аффинного пространства.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле (для тех, кто не знаком с понятием поля и не стал разбираться в мелком шрифте в предыдущем разделе, поле — это $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1. Векторным пространством над полем $\mathbb{F}$ называется множество V (элементы которого называются векторами), на котором введены две операции — сложение векторов и умножение их на элементы поля $\mathbb{F}$ (называемые в этом контексте числами или скалярами), обладающие свойствами, перечисленными в теореме 1.

Определение 2. Подмножество $W \subset V$ векторного пространства V называется векторным подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, что и V.

Иными словами (докажите, что это то же самое!), $W \subset V$ — подпространство, если оно замкнуто относительно операций: если $\vec{x}, \vec{y} \in W$, а $t \in \mathbb{F}$ — произвольное число, то $\vec{x} + \vec{y} \in W$ и $t\vec{x} \in W$.

Пример 2. Множество $\mathbb{R}[t]$ многочленов $P(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ с действительными коэффициентами — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Сложение многочленов и их умножение на числа определяется поточечно: $(P + Q)(t) = P(t) + Q(t)$ и $(sP)(t) = sP(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. При сложении многочленов их степень не увеличивается (но может уменьшиться!), а при умножении на ненулевое число — сохраняется, поэтому множество $\mathbb{R}[t]_n$ многочленов степени *не выше* n также является векторным пространством. Очевидно, $\mathbb{R}[t]_n \subset \mathbb{R}[t]$ — подпространство. В этом примере $\mathbb{R}$ можно заменить любым другим полем $\mathbb{F}$.

В свою очередь, множество $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с поточечным сложением и умножением на число — тоже векторное пространство, и $\mathbb{R}[t] \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ — его подпространство.

Пример 3. Всякое поле $\mathbb{F}$ является векторным пространством над собой.

Пример 4. Всякое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ является одновременно и векторным пространством над полем $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Вообще, если одно поле $\mathbb{F}_1$ является подполем другого, $\mathbb{F}_2$ (то есть $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$, сложение и умножение в полях совпадают, и $0, 1 \in \mathbb{F}_1$; пример: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), то каждое векторное пространство над $\mathbb{F}_2$ является одновременно и векторным пространством над $\mathbb{F}_1$.

Пример 5. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ — действительные числа. Тогда множество $\ell_{a,b} = \{(at, bt) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ — векторное подпространство (проверьте!). При соответствии между плоскими векторами-4 (множество которых и обозначается $\mathbb{R}^2$) и векторами-1 $\ell_{a,b}$ переходит, если a и b не равны одновременно нулю, в прямую, проходящую через начало координат и точку с координатами (a, b). Если $a = b = 0$, то $\ell_{0,0}$ — точка (начало координат).

Определение 3. Афиинным пространством, параллельным векторному пространству V, называется множество L (элементы которого называются точками), в котором определена операция откладывания вектора от точки, сопоставляющая каждой точке $a \in L$ и произвольному вектору $v \in V$ точку $a + v \in L$ и обладающая следующими свойствами:

(1) $a + \vec{0} = a$ для всех $a \in L$.
(2) $(a + v) + w = a + (v + w)$.
(3) Для всяких точек $a, b \in L$ существует единственный вектор $v \in V$ такой, что $a + v = b$. Такой вектор обозначается $v = b - a$.

Определение 4. Пусть $W \subset V$ — векторное подпространство. Подмножество $K \subset L$ аффинного пространства над полем V называется аффинным подпространством, параллельным подпространству W, если $a + w \in K$ для любой точки $a \in K$ и произвольного вектора $w \in W$, и, напротив, для любых двух точек $a, b \in K$ вектор $b - a$ принадлежит W.

Пример 6. Плоскость (как множество точек) является аффинным пространством, параллельным векторному пространству $\mathbb{R}^2$ — для определения операции $a + v$ на плоскости нужно ввести систему координат. Всякая прямая на плоскости является ее аффинным подпространством, параллельным одному из векторных подпространств $\ell_{a,b}$ из примера 5 (где a и b не равны одновременно нулю). Заметим, что в отличие от самого примера 5, здесь прямая может быть именно любой — не нужно, чтобы она проходила через какую-то специальную точку (начало координат).

Пример 7. Пусть V — векторное пространство. Оно имеет естественную структуру аффинного пространства, параллельного самому себе: если $a \in V$ (точка, она же вектор!) и $v \in V$, то $a + v \in V$ — сумма векторов. Свойства 1 и 2 аффинного пространства тогда эквивалентны свойствам 3 и 2 из теоремы 1 (то есть из определения векторного пространства). Свойство 3: положим $b - a \stackrel{\text{def}}{=} b + (-a)$, тогда $a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \vec{0} + b = b$.

Пусть L — аффинное пространство, параллельное векторному пространству V, и пусть $a \in L$ (точка). Тогда согласно определению аффинного пространства соответствие $R_a : V \to L$, сопоставляющее вектору $v \in V$ точку $a + v \in L$, является взаимно однозначным. Следует отметить, что это соответствие зависит от выбора точки a: если $b \in L$ — другая точка, то $R_b(v) = b + v = a + (b - a) + v = R_a((b - a) + v) \neq R_a(v)$.

Теорема 2. *Пусть L — аффинное пространство, параллельное векторному пространству V. Тогда для любого векторного подпространства $W \subset V$ и любой точки $a \in L$ существует ровно одно аффинное подпространство K, параллельное W и содержащее точку a.*

Следствие 2. *Два аффинных подпространства $K_1, K_2 \subset L$, параллельные одному и тому же подпространству $W \subset V$, либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство теоремы 2. Существование пространства K: положим $K \stackrel{\text{def}}{=} \{a + w \mid w \in W\}$. Поскольку $\vec{0} \in W$, имеем $a = a + \vec{0} \in K$. Пусть теперь $b \in K$; тогда $b = a + w$ для некоторого $w \in W$. Теперь для всякого $v \in W$ имеем $w + v \in V$, так что $b + v = a + (w + v) \in K$. Следовательно, K — аффинное подпространство L, параллельное W.

Пусть теперь $K_1, K_2 \subset L$ — два аффинных подпространства, параллельные W, и $a \in K_1, a \in K_2$. Для любой точки $b \in K_1$ имеем $b = a + w$, где $w \in W$. Но $K_2 \subset L$ — подпространство, параллельное W, откуда $b \in K_2$. Обратно, всякая точка K_2 принадлежит также и K_1, то есть $K_1 = K_2$. □