ЛЕКЦИЯ 2

Аннотация. Базисы и размерность.

1. Системы линейных уравнений.

Линейным уравнением относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ называется уравнение вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, где $a_1, \dots, a_n$ и b — элементы некоторого поля $\mathbb{F}$ (числа). Мы будем рассматривать системы (конечные наборы) линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&\dots \\
&a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Если $b_1 = \dots = b_k = 0$, то система называется однородной.

Коэффициенты левых частей всех уравнений системы (1) принято записывать в виде матрицы (прямоугольной таблицы) A, в которой k строк и n столбцов, на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число a_{ij}. Правые части можно представить как вектор $b \stackrel{\text{def}}{=} (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{F}^k$. Систему (1) будем обозначать $S_{A,b}$; если система однородная, то $S_{A,0}$ или просто S_A. Множество решений системы (т.е. наборов значений переменных $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, обращающих все уравнения в равенства) обозначим $W_{A,b}\mathbb{F}^n$ (соответственно, $W_{A,0} = W_A$).

Теорема 1. *Множество решений $W_A \subset \mathbb{F}^n$ однородной системы линейных уравнений S_A относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ является векторным подпространством в пространстве $\mathbb{F}^n$. Если $k < n$, то пространство W_A содержит по крайней мере один вектор, отличный от нулевого. Множество $W_{A,b}$ решений неоднородной системы линейных уравнений $S_{A,b}$ либо пусто, либо является аффинным подпространством в $\mathbb{F}^n$, параллельным векторному подпространству W_A.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in W_A$ и $t \in \mathbb{F}$. Тогда $tx = (tx_1, \dots, tx_n)$ — также решение S_A. Действительно, i-е уравнение системы выглядит так: $a_{i1}(tx_1) + \dots + a_{in}(tx_n) = t(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = t \cdot 0 = 0$.

Пусть теперь $y = (y_1, \dots, y_n) \in W_{A,b}$ (где $b \in \mathbb{F}^k$ любое, не исключая возможности $b = 0$). Тогда $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ — решение системы $S_{A,b}$. Действительно, i-е уравнение системы $S_{A,b}$ Выглядит так: $a_{i1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{in}(x_n + y_n) = (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n) = 0 + b_i = b_i$. Если применить это утверждение к случаю $b = 0$, то вместе с предыдущим получается доказательство того, что $W_A \subset \mathbb{F}^n$ — векторное подпространство.

Для произвольного b пусть теперь $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{F}^n$ — еще одно решение системы $S_{A,b}$. Тогда $y - z = (y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n)$ — решение однородной системы S_A: $a_{i1}(y_1 - z_1) + \dots + a_{in}(y_n - z_n) = (a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n) - (a_{i1}z_1 + \dots + a_{in}z_n) = b_i - b_i = 0$. Тем самым доказано, что если система $S_{A,b}$ имеет решение (y), то множество всех ее решений — аффинное пространство, параллельное W_A.

Пусть теперь $k < n$; докажем индукцией по n, что W_A содержит ненулевой вектор. База индукции: $n = 1$ и, следовательно, $k = 0$ (никаких уравнений нет). Тогда $W_A = \mathbb{F}$ содержит ненулевой элемент 1.

Шаг индукции: пусть сначала $a_{1n} = \dots = a_{kn} = 0$ (то есть ни одно из уравнений на самом деле не содержит переменной x_n). Тогда W_A содержит вектор $(0, \dots, 0, 1) \neq \vec{0}$. Если же не все коэффициенты a_{in} равны нулю, то можно без ограничения общности считать, что $a_{kn} \neq 0$. Тогда подставим во все уравнения, кроме последнего, переменную x_n, выраженную через переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$ из последнего уравнения — это возможно, поскольку $a_{kn} \neq 0$:

$$x_n = -(a_{k1}a_{kn}^{-1}x_1 + \dots + a_{k,n-1}a_{kn}^{-1}x_{n-1}).$$

Иными словами, рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \dots + &a_{kn}a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}(-a_{k1}a_{kn}^{-1}x_1 - \dots - a_{k,n-1}a_{kn}^{-1}x_{n-1}) = \\
&= (a_{11} - a_{1n}a_{k1}a_{kn}^{-1})x_1 + \dots + (a_{1,n-1} - a_{1,n-1}a_{k,n-1}a_{kn}^{-1})x_{n-1} = 0, \\
&\quad \dots \\
&\quad (a_{k-1,1} - a_{k-1,n}a_{k1}a_{kn}^{-1})x_1 + \dots + (a_{k-1,n-1} - a_{k-1,n-1}a_{k,n-1}a_{kn}^{-1})x_{n-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Количество уравнений в этой системе $(k - 1)$ меньше, чем количество неизвестных $(n - 1)$, поэтому по предположению индукции система имеет ненулевое решение $y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^{n-1}$. Но тогда $(x_1, \dots, x_{n-1}, -(a_{k1}a_{kn}^{-1}x_1 + \dots + a_{k,n-1}a_{kn}^{-1}x_{n-1})) \in \mathbb{F}^n$ — ненулевое решение системы S_A. Тем самым утверждение доказано по индукции. □

2. Линейная зависимость и базисы.

Определение 2. Множество векторов $v_1, \dots, v_k \in V$ в векторном пространстве V называется линейно зависимым, если существуют числа $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{F}$, не все одновременно равные нулю и такие, что $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$.

Само равенство называется линейной зависимостью, а его левая часть — линейной комбинацией векторов $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами $a_1, \dots, a_k$. Очевидно, что если множество векторов содержит линейно зависимое подмножество, то оно само является линейно зависимым — коэффициенты a_i при векторах, не вошедших в подмножество, можно положить равными нулю. Бесконечное множество векторов называется линейно зависимым, если содержит конечное линейно зависимое подмножество (любого размера). Множество векторов (конечное или бесконечное), не являющееся линейно зависимым, называется линейно независимым.

Пример 3. Множество, состоящее из одного вектора $v \in V$, линейно зависимо тогда и только тогда, когда $v = 0$.

Пример 4. Два вектора v_1, v_2 на плоскости линейно зависимы если либо один из них нулевой (по примеру 3 — множество $\{v_1, v_2\}$ содержит линейно зависимое подмножество $\{0\}$), либо они оба ненулевые, но лежат на одной прямой, проходящей через 0. В последнем случае любой из них кратен другому: $\exists t : v_2 = tv_1$, что дает линейную зависимость $tv_1 + (-1)v_2 = 0$. Любые три вектора v_1, v_2, v_3 на плоскости линейно зависимы. Действительно, если v_1, v_2 линейно зависимы, то множество $\{v_1, v_2, v_3\}$ содержит линейно зависимое подмножество. Если же v_1, v_2 линейно независимы, то они ненулевые и не параллельны — а значит, могут быть использованы как направляющие векторы системы координат (возможно, не прямоугольной) с началом O и осями ℓ_1, ℓ_2. Проведем через конец вектора v_3 прямую, параллельную ℓ_2, до пересечения с ℓ_1 в точке A_1. Тогда вектор OA_1 параллелен вектору v_1, так что $OA_1 = t_1 v_1$ для некоторого $t_1 \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется точка $A_2 \in \ell_2$ и число t_2 такое, что $OA_2 = t_2 v_2$. Но $v_3 = OA_1 + OA_2 = t_1 v_1 + t_2 v_2$, что дает линейную зависимость $t_1 v_1 + t_2 v_2 + (-1)v_3 = 0$.

Пример 5. Векторы $v_1 = (1, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{F}^n$ линейно независимы. Действительно, линейная комбинация $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ равна $0 = (0, \dots, 0)$ только если $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Пример 6. Элементы $1, t, t^2, t^3, \dots \in \mathbb{R}[t]$ векторного пространства многочленов линейно независимы. Действительно, если $t^{i_1}, \dots, t^{i_n}$ — конечное линейно зависимое подмножество, то существуют числа $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ такие, что многочлен $a_1 t^{i_1} + \dots + a_n t^{i_n}$ равен нулю (то есть имеет нулевые коэффициенты). Это означает, что $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Тем самым $\mathbb{R}[t]$ содержит бесконечное линейно независимое множество элементов. Такие векторные пространства называются бесконечномерными, а если бесконечного линейно независимого подмножества нет, то конечномерными. В примере 4 доказано, в частности, что плоскость — конечномерное пространство.

Определение 7. Конечное множество векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ называется (конечным) базисом пространства V, если для любого вектора $v \in V$ существуют и единственны числа $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ такие, что $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

Пример 8. Любые два неколлинеарных (в частности, ненулевых) вектора на плоскости представляют собой базис. В примере 4 доказано, что всякий вектор v представим в виде $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$. Если это представление не единственно: $v = b_1 v_1 + b_2 v_2$, то получается $0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2$, причем по крайней мере одно из чисел $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$ не равно нулю. Это означает, что векторы v_1, v_2 линейно зависимы, что неверно. Значит, представление единственно, и v_1, v_2 — базис.

Пример 9. Векторы $v_1, \dots, v_n$ из примера 5 составляют базис в пространстве $\mathbb{F}^n$. Действительно, $v = (a_1, \dots, a_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, и другого предствления, очевидно, нет.

Лемма 10. (1) *Базис в пространстве является линейно независимым множеством.*
(2) *Если $v_1, \dots, v_n \in V$ — конечный базис, и $m > n$, то любые m векторов $w_1, \dots, w_m \in V$ линейно зависимы.*

Доказательство. Очевидно, $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$. Если $v_1, \dots, v_n$ — базис, то это представление вектора 0 должно быть единственным, что и означает линейную независимость $v_1, \dots, v_n$.

Для доказательства второго утверждения представим каждый из векторов $w_1, \dots, w_m$ в виде линейной комбинации базисных векторов: $w_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{in} v_n$ и попробуем найти коэффициенты $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F}$ линейной комбинации такие, что $x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(a_{11} v_1 + \dots + a_{1n} v_n) + \dots + x_m(a_{m1} v_1 + \dots + a_{mn} v_n) = \\ &= (x_1 a_{11} + \dots + x_m a_{m1}) v_1 + \dots + (x_1 a_{1n} + \dots + x_m a_{mn}) v_n. \end{aligned}$$

Поскольку $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы, это равенство эквивалентно системе линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0,$$
$$\ldots$$
$$a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m = 0.$$

В этой системе n уравнений и $m > n$ неизвестных, так что согласно теореме 1 у нее есть решение, где не все переменные $x_1, \ldots, x_m$ равны нулю. Это доказывает, что $w_1, \ldots, w_m$ линейно зависимы. □

Лемма 11. *Пусть V — конечномерное пространство, и $v_1, \ldots, v_m \in V$ — линейно независимые векторы. Тогда существуют такие векторы $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$, что $v_1, \ldots, v_n$ — базис.*

Пример 12. Если v_1 — ненулевой (то есть линейно независимый) вектор на плоскости, то беря в качестве v_2 любой не коллинеарный ему вектор, получаем базис.

Доказательство леммы 11. Если вектор v представим в виде линейной комбинации $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, то в силу линейной независимости $v_1, \ldots, v_m$ это представление единственно — доказательство такое же, как в примере 8. Если система $v_1, \ldots, v_m$ — уже базис, то положим $n = m$ и лемма доказана. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — не базис. Значит, нарушается условие существования линейной комбинации: найдется вектор $v_{m+1} \in V$, не представимый в виде $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$.

Докажем, что векторы $v_1, \ldots, v_{m+1} \in V$ линейно независимы. Пусть это не так: $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + a_{m+1}v_{m+1} = 0$. Если $a_{m+1} = 0$, то последнее слагаемое можно вычеркнуть, и получится линейная зависимость между векторами $v_1, \ldots, v_m$, которой по условию нет. Значит, $a_{m+1} \neq 0$, но тогда получается $v_{m+1} = -a_{m+1}^{-1}(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m)$ — линейная комбинация, что противоречит выбору вектора v_{m+1}.

Тем самым линейно независимую систему векторов $v_1, \ldots, v_m$ удалось дополнить еще одним вектором v_{m+1} с сохранением линейной независимости. Продолжим этот процесс, строя векторы $v_{m+2}, v_{m+3}, \ldots$, и докажем, что рано или поздно он закончится. Если это не так, то получится бесконечная система векторов $v_1, v_2, \dots \in V$ такая, что для любого n векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы. Отсюда следует, что и вся система $v_1, v_2, \ldots$ линейно независима: действительно, если в ней найдется линейно независимое подмножество, сосотоящее из векторов с номерами $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, то содержащее его подмножество $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i_k}\}$ также линейно зависимо, что неверно. Следовательно, в пространстве V существует бесконечная система линейно независимых векторов — это невозможно, т.к. пространство по предположению конечномерно.

Следовательно, процесс закончится на некотором шаге номер n, что и означает, что $v_1, \ldots, v_n$ — базис в пространстве V. □

Теорема 13. *Векторное пространство имеет конечный базис тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Все базисы данного конечномерного пространства содержат одно и то же число элементов.*

Доказательство. Выберем в конечномерном пространстве V ненулевой вектор v_1, который тем самым представляет собой линейно независимую систему векторов. По лемме 11 в пространстве V существует базис $v_1, \ldots, v_n$.

Обратно, пусть в пространстве V существует конечный базис $v_1, \ldots, v_n$. По лемме 10 любые $(n+1)$ векторов в пространстве V линейно зависимы — следовательно, V конечномерно.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_m$ — два базиса в пространстве V. Векторы $w_1, \ldots, w_m$ линейно независимы по лемме 10 — следовательно, из той же леммы вытекает, что $m \leq n$. Но аналогично (поскольку $w_1, \ldots, w_m$ тоже базис) доказывается, что $n \leq m$ — следовательно, $m = n$. □

Определение 14. Количество векторов в произвольном базисе конечномерного пространства V называется его размерностью и обозначается $\dim V$.

Так, размерность плоскости равна 2, а размерность пространства $\mathbb{F}^n$ равна n. Размерность векторного пространства, состоящего только из нулевого вектора, полагается по определению равной нулю.

Следствие 15. *Если линейно независимая система векторов в конечномерном пространстве V содержит $\dim V$ векторов, то она является базисом.*

3. Размерности подпространств.

Пусть V — конечномерное пространство, и $\dim V = n$, и пусть $W \subset V$ — подпространство.

Предложение 16. *W конечномерно, и $\dim W \leq n$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда $W = V$.*

Доказательство. Пусть W бесконечномерно, то есть содержит бесконечное линейно независимое подмножество. Тогда это подмножество является бесконечным линейно независимым подмножеством также и в V. Но V по условию конечномерно — противоречие.

Пусть $w_1, \ldots, w_m$ — базис в W. Векторы $w_1, \ldots, w_m$ линейно независимы, так что по лемме 10 имеем $m \leq n$. Если $m = n$, то $w_1, \ldots, w_m$ — базис в V (следствие 15). Тем самым всякий вектор из V представляется в виде линейной комбинации векторов $w_1, \dots, w_m \in W$, и тем самым принадлежит подпространству W. Это и означает, что $W = V$. $\square$

Лемма 17. *Пересечение произвольной системы векторных подпространств пространства V — векторное подпространство.*

Доказательство — упражнение.

Пусть $X \subset V$ — произвольное непустое подмножество. Обозначим

$$\langle X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{W \subseteq V - \text{ подпространство} \\ X \subseteq W}} W \subseteq V$$

(векторное подпространство — пересечение всех подпространств $W \subset V$ таких, что $X \subset W$). $\langle X \rangle$ называется линейной оболочкой множества X.

Лемма 18. *Линейная оболочка состоит из всех линейных комбинаций $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, где $v_1, \dots, v_n \in X$ — произвольные векторы (и число n также произвольно). Конечное линейно независимое множество векторов является базисом своей линейной оболочки.*

Доказательство. Обозначим W_0 множество всех указанных в условии линейных комбинаций. Нетрудно проверить (убедитесь!), что $W_0 \subset V$ — векторное подпространство, и $X \subset W_0$. С другой стороны, если $X \subset W$, где $W \subset V$ — подпространство, то все векторы $v_1, \dots, v_n \in W$ — следовательно, линейная комбинация $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W$. Таким образом, $W_0 \subset W$, и $\langle X \rangle = \bigcap_{X \subset W} W = W_0$.

Пусть $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset V$. По только что доказанному любой вектор $w \in W$ представим в виде линейной комбинации векторов v_i. Если $v_1, \dots, v_n \in V$ линейно независимы, то такое представление единственно и, следовательно, $v_1, \dots, v_n$ — базис в W. $\square$

Теорема 19. *Пусть V — конечномерное пространство, $W_1, W_2 \subset V$ — подпространства. Тогда* $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim\langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

Пример 20. Пусть V — трехмерное пространство, и $W_1, W_2 \subset V$ — подпространства размерностей 1 и 2, то есть прямая и плоскость, проходящие через начало координат. Тогда существуют два возможных их расположения: либо прямая и плоскость пересекаются в единственной точке — начале координат, либо прямая лежит в плоскости. В первом случае $\langle W_1 \cap W_2 \rangle = V$, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, и теорема дает равенство $1 + 2 = 0 + 3$. Во втором случае $\langle W_1 \cap W_2 \rangle = W_2$, $W_1 \cap W_2 = W_1$, и теорема дает $1 + 2 = 1 + 2$.

Доказательство теоремы 19. Пусть $W_0 \stackrel{\text{def}}{=} W_1 \cap W_2$, $W \stackrel{\text{def}}{=} \langle W_1 \cup W_2 \rangle$, $n_i \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_i$ $(i = 0, 1, 2)$ и $n \stackrel{\text{def}}{=} \dim W$. Пусть $w_1, \dots, w_{n_0}$ — базис в W_0. Он линейно независим, так что его можно дополнить до базиса $w_1, \dots, w_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_1}$ в W_1 и до базиса $w_1, \dots, w_{n_0}, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_2}$ в W_2. Докажем, что объединение этих базисов — векторы $w_1, \dots, w_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_1}, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_2}$ — составляет базис в W.

Прежде всего, все эти векторы принадлежат $W_1 \cup W_2$ и, следовательно, их линейная оболочка — подмножество W. С другой стороны, произвольный вектор $w \in W$ представляется в виде линейной комбинации $w = a_1 \mu_1 + \dots + a_k \mu_k + b_1 \nu_1 + \dots + b_\ell \nu_\ell$, где $\mu_1, \dots, \mu_k \in W_1$ и $\nu_1, \dots, \nu_\ell \in W_2$. Каждый вектор μ_i — линейная комбинация векторов w_j и u_j, а каждый вектор ν_i — линейная комбинация векторов w_j и v_j. Подставляя эти линейные комбинации в выражение для w, получим, что w — линейная комбинация w_j, u_j и v_j (со всевозможными j). Тем самым w (а это произвольный вектор из W!) лежит в линейной оболочке векторов w_j, u_j и v_j — значит, эта линейная оболочка совпадает с W.

Докажем, что векторы $w_1, \dots, w_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_1}, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_2}$ линейно независимы. Пусть

$$a_1 w_1 + \dots + a_{n_0} w_{n_0} + b_{n_0+1} u_{n_0+1} + \dots + b_{n_1} u_{n_1} + c_{n_0+1} v_{n_0+1} + \dots + c_{n_2} v_{n_2} = 0,$$

то есть

$$a_1 w_1 + \dots + a_{n_0} w_{n_0} + b_{n_0+1} u_{n_0+1} + \dots + b_{n_1} u_{n_1} = -c_{n_0+1} v_{n_0+1} - \dots - c_{n_2} v_{n_2}.$$

Левая часть равенства принадлежит W_1, правая — W_2, поэтому оба вектора принадлежат $W_0 = W_1 \cap W_2$. Поскольку $w_0, \dots, w_{n_0}$ — базис в W_0, а $w_1, \dots, w_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_1}$ — базис в W_1, получаем, что $b_{n_0+1} = \dots = b_{n_1} = 0$, так что

$$a_1 w_1 + \dots + a_{n_0} w_{n_0} + c_{n_0+1} v_{n_0+1} + \dots + c_{n_2} v_{n_2} = 0.$$

Поскольку $w_1, \dots, w_{n_0}, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_2}$ — базис в W_2, все коэффициенты в этой линейной комбинации также равны нулю, и линейная независимость доказана. В силу леммы 18 $w_1, \dots, w_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_1}, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_2}$ — базис в своей линейной оболочке, то есть в W. Тем самым $\dim W = n_1 + n_2 - n_0$, и теорема доказана. $\square$