ЛЕКЦИЯ 3

Аннотация. Линейные отображения.

Определение 1. Пусть V, W — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если оно сохраняет основные операции в линейном пространстве — переводит сумму векторов в сумму их образов и произведение вектора на число — в произведение образа на то же число: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ и $f(t\vec{x}) = tf(\vec{x})$.

Замечание 1. Линейное отображение обязательно переводит нулевой вектор в нулевой (вообще говоря, другого пространства!): $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Эквивалентное определение:

Определение 1'. Пусть V, W — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если для любых двух векторов $v_1, v_2 \in V$ и любых двух чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ выполнено равенство $f(x_1v_1 + x_2v_2) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2)$.

Доказательство эквивалентности определений: пусть f — линейное отображение в смысле определения 1. Тогда для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$, $v_1, v_2 \in V$ имеем $f(x_1v_1 + x_2v_2) = f(x_1v_1) + f(x_2v_2)$ (первое свойство) $= x_1f(v_1) + x_2f(v_2)$ (второе свойство для каждого из слагаемых). Обратно: пусть f линейно в смысле определения 1'. Числа x_1, x_2 произвольны; если взять $x_1 = x_2 = 1$, то получится первое равенство из определения 1; если взять $x_1 = t$, $x_2 = 0$, то второе.

Еще одно эквивалентное определение:

Определение 1". Пусть V, W — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если образ любой линейной комбинации векторов из V — линейная комбинация их образов с теми же коэффициентами: для любых векторов $v_1, \dots, v_m \in V$ и любых чисел $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F}$ выполнено равенство $f(x_1v_1 + \dots + x_mv_m) = x_1f(v_1) + \dots + x_mf(v_m)$.

Очевидно, определение 1' — частный случай опредеделения 1"; доказательство обратного (если f линейно в смысле определения 1', то в смысле определения 1" оно линейно тоже) — несложное упражнение (индукция по m).

Пример 1. Пусть $a \in \mathbb{F}$. Тогда отображение $m_a : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, заданное формулой $m_a(x) = ax$ (умножение на a) — линейное; здесь $\mathbb{F}$ наделено обычной структурой векторного пространства над собой.

Пример 2. Обобщение примера 1: пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ (иными словами, задан вектор $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$). Тогда отображение $\ell_a : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$, заданное формулой $\ell_a((x_1, \dots, x_n)) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, является линейным (здесь $(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ — произвольный вектор в $\mathbb{F}^n$.

Линейные отображения в поле $\mathbb{F}$ (рассматриваемое как векторное пространство над собой), называют линейными функционалами.

Пример 3. Отождествим плоскость Π с двумерным векторным пространством, выбрав в ней начало координат O (и рассматривая вместо точки $A \in \Pi$ ее радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$, как в лекции 1). Тогда любое движение плоскости $f : \Pi \to \Pi$, переводящее точку O в себя, является линейным преобразованием (преобразование — это отображение множества, в данном случае плоскости, в себя). Действительно, пусть $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, то есть $OACB$ — параллелограмм, и пусть $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ и $f(C) = C'$. Поскольку по условию $f(O) = O$ и f — движение, $OA'C'B'$ также является параллелограммом и, следовательно, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.

Пусть теперь $\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OA}$, где $t \in \mathbb{R}$. В случае $t > 0$ это означает, что D лежат на луче OA, и $|OD| = t\,|OA|$. Если $f(D) = D'$, то поскольку движение сохраняет расстояния и переводит лучи в лучи, получим, что D' лежит на луче OA' и $|OD'| = t\,|OA'|$ — следовательно, $\overrightarrow{OD'} = t\overrightarrow{OA'}$; тем самым линейность f доказана.

Пример 4. Пусть Π — плоскость, $\ell \subset \Pi$ — прямая в ней, и $f : \Pi \to \Pi$ — проекция плоскости на прямую. Обратите внимание, что f — отображене Π в себя (хотя образ f — прямая ℓ, не совпадает со всей Π). Введем на Π структуру векторного пространства, отождествляя точку A с радиус-вектором $\overrightarrow{OA}$, где точка $O \in \ell$. Тогда отображение f становится линейным — проверьте!

Пример 5. Обобщение примера 2: заготовим k наборов чисел (т.е. векторов) $\vec{a_1} = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \vec{a_k} = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ и рассмотрим отображение $f_a : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k$, заданное правилом $f_a((x_1, \dots, x_n)) = (\ell_{a_1}(x), \dots, \ell_{a_k}(x))$, где линейные функционалы ℓ заданы формулой из примера 2.

Координаты векторов $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_k}$ удобно собрать в прямоугольную таблицу из k строк и n столбцов, называемую матрицей; в строке номер $i = 1, \dots, k$ стоят координаты вектора $\vec{a_i}$:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Вскоре мы увидим, что любое линейное отображение $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k$ имеет вид f_a для некоторой матрицы a.

Теорема 1.
(1) *Композиция $f \circ g : V \to U$ линейных отображений $g : V \to W$ и $f : W \to U$ — линейное отображение.*
(2) *Если линейное отображение $f : V \to W$ имеет обратное $f^{-1} : W \to V$, то оно тоже линейно.*

Доказательство. Утверждение 2: пусть $w_1, w_2 \in W, t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, и $v_1 \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(w_1), v_2 \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(w_2) \in V$. Тогда $f^{-1}(x_1w_1 + x_2w_2) = f^{-1}(x_1f(v_1) + x_2f(v_2)) = f^{-1}(f(x_1v_1 + x_2v_2))$ (поскольку f линейно) $= x_1v_1 + x_2v_2 = x_1f^{-1}(w_1) + x_2f^{-1}(w_2)$.

Доказательство утверждения 1 — (легкое) упражнение. □

Напомним (или сообщим) такое определение:

Определение 2. Множество G отображений $f : X \to X$ множества X в себя называется *группой преобразований*, если обладает следующими свойствами:

(1) G замкнуто относительно композиции преобразований: если $f : X \to X$ и $g : X \to X$ принадлежат G, то их композиция $f \circ g : X \to X$ тоже принадлежит G.
(2) Тождественное преобразование $\mathrm{id}_X : X \to X$ принадлежит G.
(3) Замкнутость относительно взятия обратного: каждое преобразование $f \in G$ имеет обратное $f^{-1} : X \to X$, и это обратное тоже принадлежит G.

Из теоремы 1 вытекает, что множество *обратимых* линейных отображений $V \to V$ (для всякого векторного пространства V) является группой преобразований; она обозначается $\mathrm{GL}(V)$.

Мелкий шрифт: категории. Обратимые линейные отображения из пространства в себя образуют группу преобразований. Возникает закономерный вопрос: а какую алгебраическую структуру образуют *все* линейные преобразования — необязательно обратимые, и, возможно, действующие из одного пространства в другое? Эта структура называется *категория*.

В любой категории $\mathcal{C}$ есть объекты, морфизмы и композиция. Объекты — какие-то сущности (разные для разных категорий); при этом для любых двух объектов A и B определено множество $\mathrm{Mor}(A, B)$, элементы которого называются морфизмами из A в B. В множестве $\mathrm{Mor}(A, A)$ морфизмов из A в себя есть выделенный элемент id_A, называемый тождественным морфизмом.

Кроме этого, для любых трех объектов A, B, C и любых двух морфизмов $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ определен морфизм $g \circ f \in \mathrm{Mor}(A, C)$ (называемый композицией морфизмов f и g); при этом операция композиции $\circ$ обладает следующими свойствами:

(1) Ассоциативность: для любых f, g как выше и $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$ имеет место равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (обе его части — морфизмы из A в D).
(2) id — левый и правый нейтральный элемент относительно композиции: для всякого $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ имеют место равенства $\mathrm{id}_B \circ f = f \circ \mathrm{id}_A = f$.

Как мы доказали выше, можно рассмотреть *линейную категорию*, объекты которой — всевозможные линейные пространства над заранее фиксированным полем $\mathbb{F}$, а множество $\mathrm{Mor}(A, B)$ состоит из всех линейных отображений $A \to B$. Композиция в данном случае — действительно композиция отображений. Похожих категорий довольно много: можно даже рассмотреть *категорию множеств*, объекты которой — все множества, а множество $\mathrm{Mor}(A, B)$ состоит из всех вообще отображений $A \to B$; композиция — композиция.

Но бывают категории и другой природы. Рассмотрим, например, плоскость Π и определим категорию, объекты которой — точки этой плоскости. Для любых двух точек $a, b \in \Pi$ морфизмы из a в b — это непрерывные кривые, соединяющие a и b. Композицией кривых $\gamma \in \mathrm{Mor}(a, b)$ и $\delta \in \mathrm{Mor}(b, c)$ называется кривая $\delta \circ \gamma$, соединяющая a и c и полученная "приклеиванием" кривой δ к конечной точке кривой γ. Элемента $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Mor}(a, a)$ — "тривиальная" кривая, состоящая из одной точки a.

Опишем теперь все множество линейных отображений $V \to W$ при условии, что пространство V конечномерно. Для этого рассмотрим в V произвольный базис $v_1, \dots, v_n \in V$.

Теорема 2. *Для произвольного набора векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ существует и единственно линейное отображение $f : V \to W$ такое, что $f(v_i) = w_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. Отображение f обратимо тогда и только тогда, когда набор векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ является базисом в W.*

Доказательство. Существование f: произвольный вектор $v \in V$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов: существуют и единственны числа $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ такие, что $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$. Положим по определению $f(v) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ и докажем, что полученное отображение — линейне. Действительно, пусть $u = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$. Тогда $t_1v + t_2u = (t_1x_1 + t_2y_1)v_1 + \dots + (t_1x_n + t_2y_n)v_n$, откуда $f(t_1v + t_2u) = (t_1x_1 + t_2y_1)w_1 + \dots + (t_1x_n + t_2y_n)w_n = t_1(x_1w_1 + \dots + x_nw_n) + t_2(y_1w_1 + \dots + y_nw_n) = t_1f(v) + t_2f(u)$.

Единственность f: пусть $f(v_i) = w_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Для произвольного вектора $v \in V$ существуют и единственны числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$. Согласно определению 1", $f(v) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ определено однозначно.

Пусть теперь $w_1, \dots, w_n$ — базис в W. Рассмотрим линейное отображение $g : W \to V$, для которого $g(w_i) = v_i$ при всех $i = 1, \dots, n$ — как только что доказано, оно существует. Тогда композиция $g \circ f : V \to V$ — линейное отображение (утверждение 1 теоремы 1); при этом $(g \circ f)(v_i) = v_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Этими же свойствами (линейность и $v_i \mapsto v_i$) обладает и тождественное отображение id_V. В силу доказанной выше единственности $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Так же доказывается, что $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Обратно, пусть $f^{-1} : W \to V$ существует; согласно утверждению 2 теоремы 1 оно линейно. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор и $v \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(w) \in V$. Поскольку $v_1, \dots, v_n$ — базис, существуют числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$. Тогда $w = f(v) = f(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ — таким образом, всякий вектор из W можно представить в виде линейной комбинации вектров $w_1, \dots, w_n$. Чтобы доказать, что эта комбинация единственна, предположим, что $w = y_1w_1 + \dots + y_nw_n$. Тогда в силу линейности f^{-1} получаем, что $v = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$, а поскольку $v_1, \dots, v_n \in V$ — базис, $y_1 = x_1$, ..., $y_n = x_n$. □

Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если между ними существует обратимое линейное отображение $f : V \to W$. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Если два пространства изоморфны, то они конечномерны или бесконечномерны одновременно. Два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Пусть теперь $f : V \to W$ — линейное отображение между конечномерными пространствами, в которых зафиксированы базисы $v_1, \dots, v_k$ и $w_1, \dots, w_n$. Для произвольного $i = 1, \dots, k$ разложим вектор $f(v_i) \in W$ по базису: $f(v_i) = a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n$. Получившийся набор чисел $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$, можно собрать в прямоугольную таблицу (1) из k строк и n столбцов, называемую матрицей отображения f в базисах $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_n \in W$ (она зависит и от отображения, и от обоих базисов). Из той же теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Зафиксируем базисы $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_n \in W$ в конечномерных векторных пространствах V и W. Тогда для любой $k \times n$-матрицы a (как в (1)) существует и единственно линейное отображение $f : V \to W$ такое, что a является его матрицей в базисах $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_n \in W$.*

Пример 6. В пространстве $\mathbb{F}^m$ (с произвольным m) имеется так называемый стандартный базис $e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}$, где $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (всего m чисел, единица на i-ом месте, $i = 1, \dots, m$). Как нетрудно видеть, матрицей отображения f_a из примера 5 в базисах $e_1^{(k)}, \dots, e_k^{(k)}$ и $e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}$ является матрица a. Тем самым из следствия 2 вытекает, что любое линейное отобажение $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ есть f_a для некоторой (однозначно определенной) матрицы a.

Пример 7. Введем на плоскости систему координат, отождествив ее тем самым с векторным пространством $\mathbb{R}^2$. Отображение проекции на ось абсцисс ℓ (пример 4) имеет в стандартном базисе матрицу $\left(\begin{smallmatrix} cc1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ (убедитесь!).

Преобразование поворота на угол φ вокруг начала координат имеет в том же базисе матрицу $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Обозначим теперь $\mathrm{Lin}(V, W)$ множество всех линейных отображений из V в W. На множестве $\mathrm{Lin}(V, W)$ легко определить операции сложения и умножения на число:

- Если $f : V \to W$ и $g : V \to W$ — линейные отображения, то отображение $f + g : V \to W$ определяется как поточечная сумма: $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ для любого вектора $v \in V$; в правой части — сумма векторов $f(v) \in W$ и $g(v) \in W$.
- Если $f : V \to W$ — линейное отображение и $t \in \mathbb{F}$, то отображение tf определяется путем поточечного умножения на t: $(tf)(v) = tf(v)$; справа — произведение вектора $f(v) \in W$ на число t.

Теорема 3. *Отображения $f+g$ и tf, определенные выше, линейные (т.е. принадлежат $\mathrm{Lin}(V, W)$). Множество $\mathrm{Lin}(V, W)$ с операциями сложения элементов и умножения их на число представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}$.*

Доказательство теоремы — рутинное упражнение.

Теорема 4. *Пусть V и W — конечномерные пространства, в которых зафиксированы базисы $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_n \in W$.*

(1) *Если отображения* $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$ *и* $g \in \mathrm{Lin}(V, W)$ *имеют в базисах* $v_1, \dots, v_k \in V$ *и* $w_1, \dots, w_n \in W$ *матрицы* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$*, то их линейная комбинация* $t_1 f + t_2 g$ *имеет в тех же базисах матрицу* $(t_1 a_{ij} + t_2 b_{ij})$*. Эта матрица обозначается* $t_1 A + t_2 B$ *и называется линейной комбинацией матриц* A *и* B *(при* $t_1 = t_2 = 1$ *— суммой матриц* $A + B$*, при* $t_1 = t$ *и* $t_2 = 0$ *— произведением* tA *матрицы* A *на число* t*).*
(2) *В тех же условиях размерность линейного пространства* $\mathrm{Lin}(V, W)$ *равна* kn*.*
(3) *Если отображение* $h : W \to U$ *имеет матрицу* (c_{pq}) *в базисах* $w_1, \dots, w_n \in W$ *и* $u_1, \dots, u_m \in U$*, то композиция* $h \circ f : V \to U$ *имеет в базисах* $v_1, \dots, v_k \in V$ *и* $u_1, \dots, u_m \in U$ *матрицу* $D = (d_{iq})$ *из* k *строк и* m *столбцов, где* $d_{iq} = a_{i1} c_{1q} + \dots + a_{in} c_{nq}$*. Эта матрица обозначается* $D = AC$ *и называется произведением матриц* A *и* C*.*

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Для доказательства утверждения 2 обозначим $e_{ij}^{k,n}$ матрицу $k \times n$, у которой на пересечении строки номер i и столбца номер j стоит 1, а в остальных местах — 0; здесь i — произвольное число от 1 до k, а j — произвольное число от 1 до n. Тогда, из утверждения 1 вытекает, что произвольная матрица a является линейной комбинацией $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}^{k,n}$, причем коэффициенты линейной комбинации — единственно возможные. Тогда из следствия 2 и утверждения 1 вытекает, что отображения $E_{ij} : V \to W$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$, матрицы которых в базисх $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_n \in W$ равны $e_{ij}^{k,n}$, составляют базис в пространстве $\mathrm{Lin}(V, W)$.

Утверждение 3: $(h \circ f)(v_i) = h(a_{i1} w_1 + \dots + a_{in} w_n) = a_{i1} f(w_1) + \dots + a_{in} f(w_n) = a_{i_1}(c_{11} u_1 + \dots + c_{1m} u_m) + \dots + a_{i_n}(c_{n1} u_1 + \dots + c_{nm} u_m) = (a_{i1} c_{11} + \dots + a_{in} c_{n1}) u_1 + \dots + (a_{i1} c_{1m} + \dots + a_{in} c_{nm}) u_m$, что и требовалось. $\square$