ЛЕКЦИЯ 4

Аннотация. Линейная двойственность. Ядро и образ линейного отображения.

Пространство $\operatorname{Lin}(V, \mathbb{F})$ обозначается V^* и называется двойственным к V пространством; его элементы, как уже говорилось в лекции 3, называются линейными функционалами на пространстве V.

Пусть V конечномерно и $v_1, \dots, v_n \in V$ — базис. Обозначим $v^i \in V^*$ функционал, заданный равенством $v^i(v_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{cases}$ (такой функционал существует и единствен по теореме 2 лекции 3); здесь $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. *Элементы $v^1, \dots, v^n$ образуют базис в пространстве V^*.*

Доказательство. Для любого элемента $f \in V^*$ обозначим символом $\varphi_f \in V^*$ линейную комбинацию $f(v_1)v^1 + \dots + f(v_n)v^n$. Тогда $\varphi_f(v_i) = f(v_1)v^1(v_i) + \dots + f(v_i)v^i(v_i) + \dots + f(v_n)v^n(v_i) = f(v_i)$.

Согласно теореме 2 лекции 3, два функционала на V совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их значения на базисных векторах $v_1, \dots, v_n$. Следовательно, $f = \varphi_f$, причем $f(v_1), \dots, f(v_n)$ — единственно возможные коэффициенты линейной комбинации φ_f. Это и означает, что $v^1, \dots, v^n \in V^*$ — базис. $\square$

Следствие 1. *Если V конечномерно, то V^* также конечномерно и имеет ту же размерность.*

Теорема 1 и следствие 1 — частный случай (и небольшое уточнение в этом случае) теоремы 4 лекции 3.

Пусть теперь $W \subset V$ — векторное подпространство. *Аннулятором* W называется множество $W^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in V^* \mid \forall w \in W \; \gamma(w) = 0\} \subset V^*$.

Теорема 2. *$W^\perp$ — векторное подпространство в V. Если V конечномерно, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то $\dim W^\perp = n - k$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго рассмотрим базис $v_1, \dots, v_k$ в подпространстве $W \subset V$. Векторы этого базиса линейно независимы, так что можно его дополнить векторами $v_{k+1}, \dots, v_n$ до базиса в V. Пусть $v^1, \dots, v^n \in V^*$ — двойственный базис.

Линейный функционал $\gamma \in V^*$ равен нулю на всех векторах пространства W (то есть принадлежит $W^\perp$) тогда и только тогда, когда он равен нулю на векторах любого базиса в W — например, $v_1, \dots, v_k$. Если $\gamma = x_1 v^1 + \dots + x_n v^n$, то $\gamma(v_i) = x_i$. Следовательно, $\gamma \in W^\perp$ тогда и только тогда, когда $x_1, \dots, x_k = 0$, то есть γ — линейная комбинация векторов $v^{k+1}, \dots, v^n \in V^*$. Эти векторы линейно независимы (они — часть двойственного базиса), так что они составляют базис в $W^\perp$. $\square$

Пусть теперь $f : V \to W$ — линейное отображение. Определим *двойственное* к нему линейное отображение $f^* : W^* \to V^*$ равенством $(f^*(\ell))(v) = \ell(f(v))$, где $\ell : W \to \mathbb{F}$ — произвольный линейный функционал (т.е. элемент W^*), а $v \in V$ — произвольный вектор (на котором вычисляется функционал $f^*(\ell) \in V^*$).

Теорема 3. *Операция сопряжения $f \mapsto f^*$ обладает следующими свойствами:*

(1) *Она линейна: $(t_1 f + t_2 g)^* = t_1 f^* + t_2 g^*$.*
(2) *Она антикоммутирует с композицией: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.*
(3) *Если матрица отображения f в базисах $v_1, \dots, v_k \in W$ и $w_1, \dots, w_n \in W$ есть $A = (a_{ij})$, то линейное отображение f^* в двойственных базисах $w^1, \dots, w^n \in W^*$ и $v^1, \dots, v^k \in V^*$ имеет матрицу $A^* = (a'_{ij})$ из n строк и k столбцов, получающуюся* транспонированием — *отражением A относительно диагонали: $a'_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$.*

Здесь $f, g : V \to W$ — произвольные линейные отображения, а $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ — произвольные числа.

Доказательство. Доказательство утверждений 1 и 2 — упражнение.

Утверждение 3: из теоремы 2 лекции 3 вытекает, что два линейных функционала совпадают, если совпадают их значения на векторах (любого) базиса. Имеем $(f^*(w^i))(v_j) = w^i(f(v_j)) = w^i(a_{j1}v_1 + \dots + a_{jn}v_n) = a_{j1}w^i(v_1) + \dots + a_{jn}w^i(v_n) = a_{ji}$ (член $w^i(v_i) = 1$, остальные равны нулю). Если теперь $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} a_{1i}v^1 + \dots + a_{ni}v^n$, то тоже получается $\varphi(v_j) = a_{ji}$ (проверьте!), откуда $f^*(v^i) = \varphi$, и утверждение доказано. $\square$

Определим теперь для произвольного вектора $v \in V$ отображение $\Phi(v) : V^* \to \mathbb{F}$ формулой $(\Phi(v))(\gamma) = \gamma(v)$, где $\gamma \in V^*$ — произвольный линейный функционал на V (т.е. линейное отображение $V \to \mathbb{F}$).

Теорема 4. (1) *Отображение* $\Phi(v) : V^* \to \mathbb{F}$ *— линейное, то есть* $\Phi(v) \in V^{**}$ *(где* $V^{**} \stackrel{def}{=} \mathrm{Lin}(V^*, \mathbb{F})$ *— пространство, двойственное к* V^**).*

(2) *Отображение* $\Phi : V \to V^{**}$ *(сопоставляющее вектору* v *эоемент* $\Phi(v) \in V^{**}$*) — линейное.*

(3) *Если пространство* V *конечномерно, то отображение* Φ *является изоморфизмом векторных пространств. Если* $v_1, \dots, v_n$ *— базис в* V*, то* $\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)$ *— базис в* V^{**}*, двойственный к* $v^1, \dots, v^n \in V^*$*.*

(4) *Пусть* $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$*, где* V *и* W *конечномерны. Тогда изоморфизм* Φ *переводит* f *в линейное отображение* $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$*, двойственное к* $f^* : W^* \to V^*$ *— точнее, имеет место равенство* $f^{**} \circ \Phi = \Phi \circ f$*.*

Доказательство. Доказательство утверждений 1 и 2 — легкие упражнения.

Докажем утверждение 3. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — базис в пространстве V, и пусть $x_1\Phi(v_1) + \dots + x_n\Phi(v_n) = 0$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$. Это означает, что для произвольного линейного функционала $\gamma \in V^*$ имеет место равенство $0 = x_1(\Phi(v_1))(\gamma) + \dots + x_n(\Phi(v_n))(\gamma) = x_1\gamma(v_1) + \dots + x_n\gamma(v_n) = \gamma(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)$. В частности, это верно для элементов двойственного базиса: $\gamma = v^i$, откуда $0 = v^i(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_i$. Таким образом, все коэффициенты x_i нулевые, так что векторы $\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n) \in V^{**}$ линейно независимы. Но $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ (следствие 1), откуда вытекает, что $\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n) \in V^{**}$ — базис, а Φ — изоморфизм (поскольку переводит базис в базис).

Непосредственное вычисление показывает, что $\Phi(v_i)(v^j) = v^j(v_i) = 1$, если $i = j$ и $= 0$, если $i \neq j$. Это означает, что базис $\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)$ — двойственный к $v^1, \dots, v^n$. Для произвольного вектора $v \in V$ и произвольного элемента $\gamma \in W^*$ (т.е. функционала $\gamma : W \to \mathbb{F}$) имеем $\Phi(v)(f(v))(\gamma) = \gamma(f(v))$ и, с другой стороны, $f^{**}(\Phi(v))(\gamma) = \Phi(v)(f^*(\gamma)) = f^*(\gamma)(v) = \gamma(f(v)) = \Phi(v)(f(v))(\gamma)$, и утверждение 4 доказано. $\square$

Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение. Назовем (как для любого отображения) *образом* f множество $\mathrm{Im}\, f = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$, а *ядром* f — множество $\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$ (это понятие уже имеет смысл только для линейных отображений).

Пример 1. Пусть Π — плоскость (на которой, как обычно, отмечена точка O, что превращает ее в двумерное векторное пространство), $f : \Pi \to \Pi$ — ортогональная проекция на прямую $\ell \subset \Pi$, $O \in \ell$. Образом f является прямая ℓ, а ядром — прямая $\ell^\perp$, перпендикулярная ℓ и проходящая через точку O.

Теорема 5. *Ядро и образ линейного отображения* f *являются линейными подпространствами в* V *и* W *соответственно. Если* V *конечномерно, то имеет место равенство* $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V$*.*

Доказательство. Пусть $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\, f$, то есть $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ для некоторых $v_1, v_2 \in V$, и пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$. Тогда $t_1w_1 + t_2w_2 = f(t_1v_1 + t_2v_2) \in \mathrm{Im}\, f$ — следовательно, $\mathrm{Im}\, f \subset W$ это подпространство. Рассуждение для ядра аналогичное (проделайте!).

Для доказательства формулы для размерностей обозначим $n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim V$, $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim \mathrm{Ker}\, f$ (ядро конечномерно, поскольку V конечномерно, и $k \leq n$) и выберем базис $v_1, \dots, v_k$ в подпространстве $\mathrm{Ker}\, f \subset V$. Базис — линейно независимая система векторов, и поэтому ее можно дополнить векторами $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ до базиса в V. Для произвольного вектора $v = x_1v_1 + \dots + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1} + \dots + x_nv_n$ имеем $f(v) = x_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + x_nf(v_n)$, откуда вытекает, что $\mathrm{Im}\, f \subset W$ совпадает с линейной оболочкой векторов $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ (и, следовательно, конечномерно, даже если W бесконечномерно!).

Пусть теперь между векторами $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ имеется линейная зависимость: $a_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + a_nf(v_n) = 0$. Тогда $0 = f(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n)$, то есть $a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n \in \mathrm{Ker}\, f$. Но базис в $\mathrm{Ker}\, f$ составляют векторы $v_1, \dots, v_k$, так что это возможно только при $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$. Таким образом, векторы $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ линейно независимы и, следовательно, составляют базис в своей линейной оболочке, то есть в $\mathrm{Im}\, f$. Получается $\dim \mathrm{Im}\, f = n - k = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, f$. $\square$

Теорема 6. *Пусть* $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$*, где* V *и* W *конечномерны. Тогда* $(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \mathrm{Ker}\, f^*$ *и* $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \mathrm{Im}\, f^*$*.*

Доказательство. Докажем, что $(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \mathrm{Ker}\, f^*$. Пусть $\gamma \in W^*$ — произвольный линейный функционал на W; включение $\gamma \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp \subset W^*$ означает, что $\gamma(w)$ для любого $w \in \mathrm{Im}\, f$, то есть $\gamma(f(v)) = 0$ для любого $v \in V$. Это равносильно тому, что для любого $v \in V$ имеем $f^*(\gamma)(v) = \gamma(f(v)) = 0$, то есть $\gamma \in \mathrm{Ker}\, f^*$.

Докажем теперь, что $\mathrm{Im}\, f^* \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$. Пусть $\lambda \in V^*$ — произвольный линейный функционал на V; включение $\lambda \in \mathrm{Im}\, f^*$ означает, что $\lambda = f^*(\gamma)$ для некоторого $\gamma \in W^*$. Пусть теперь $v \in \mathrm{Ker}\, f$, то есть $f(v) = 0$. Тогда $\lambda(v) = f^*(\gamma)(v) = \gamma(f(v)) = 0$, то есть $\gamma \in (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

Пусть $\dim V = n$ и $\dim W = m$. Обозначим $k = \dim \mathrm{Ker}\, f$, тогда $\dim \mathrm{Im}\, f = n - k$ по теореме 5. Отсюда вытекает, что $\dim(\mathrm{Im}\, f)^\perp = m - n + k$ по теореме 2 (напомним, что $\mathrm{Im}\, f \subset W$) — следовательно, и $\dim \mathrm{Ker}\, f^* = m - n + k$ согласно доказанному в первом абзаце. Но тогда $\dim \mathrm{Im}\, f^* = n - k$ по теореме 5 (примененной к линейному отображению f^*). С другой стороны, по теореме 2 получаем $\dim(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = n - k = \dim \mathrm{Im}\, f^*$, так что доказанное выше включение $\mathrm{Im}\, f^* \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ на самом деле является равенством. $\square$