ЛЕКЦИЯ 5

Аннотация. Аффинные пространства и аффинные отображения. Взаимосвязь аффинной и линейной группы. Аффинные реперы и барицентрические координаты.

Напоминание

Аффинное пространство L, параллельное векторному пространству V (над полем $\mathbb{F}$) — множество (его элементы называются точками), в котором определена операция откладывания вектора (элемента V) от точки: $a+v \in L$, где $a \in L$ и $v \in V$; свойства операции перечислены в лекции 1. Если $a, b \in L$ — две точки, то символом $b-a \in V$ обозначается вектор (он существует и единствен), для которого $a+(b-a)=b$.

Для любой точки $a \in L$ отображение $M_a : V \to L$, переводящее вектор v в $M_a(v) = a+v$, взаимно однозначно и переводит $0 \in V$ в точку a. Мы будем говорить об этом отображении "отметим точку $a \in L$ и тем самым отождествим L с V".

Если V — векторное пространство, $W \subset V$ — векторное подпространство, а $c \in V$ — произвольный вектор, то $c+W \stackrel{\text{def}}{=} \{c+w \mid w \in W\} \subset V$ — аффинное пространство, параллельное W; операция $a+v$ здесь — сумма вектора $a \in c+W \subset V$ и вектора $v \in W \subset V$ в векторном пространстве V. Если $c \in W$ (например, $c=0$), то $c+W = W$; в частности, само пространство V — аффинное пространство, параллельное самому себе (случай $W = V$, c любое).

1. Аффинные отображения

Пусть K и L — аффинные пространства, параллельные векторным пространствам V и W (над одним и тем же полем $\mathbb{F}$). Отображение $f : K \to L$ называется *полуаффинным*, если оно переводит равные векторы в равные: если точки $a, b, c, d \in K$ таковы, что $b-a = d-c \in V$, то $f(b)-f(a) = f(d)-f(c) \in W$.

Таким образом, полуаффинное отображение f порождает отображение $\tilde{f} : V \to W$: если $v \in V$, то $\tilde{f}(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(a+v)-f(a)$, где $a \in K$ — произвольная точка.

Лемма 1. *Для любого полуаффинного отображения f отображение $\tilde{f} : V \to W$ аддитивно: $\tilde{f}(v_1+v_2) = \tilde{f}(v_1)+\tilde{f}(v_2)$ для любых векторов $v_1, v_2 \in V$.*

Доказательство. Пусть точки $a, b, c \in K$ таковы, что $b-a = v_1$, $c-b = v_2$, тогда по определению аффинного пространства $c-a = v_1+v_2$. Теперь $\tilde{f}(v_1+v_2) = f(c)-f(a) = (f(c)-f(b))+(f(b)-f(a)) = \tilde{f}(v_1)+\tilde{f}(v_2)$. □

Определение 1. Полуаффинное отображение $f : K \to L$ называется *аффинным*, если оператор $\tilde{f} : V \to W$ линеен, т.е. помимо аддитивности (которой он обладает по лемме 1) удовлетворяет еще и тождеству $\tilde{f}(tv) = t\tilde{f}(v)$ для всех векторов $v \in V$ и всех скаляров (чисел) $t \in \mathbb{F}$.

Теорема 1. (1) *Композиция аффинных преобразований аффинна.*
(2) $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ *для любых двух аффинных преобразований $f : L \to M$ и $g : K \to L$ (K, L, M — произвольные аффинные пространства над полем $\mathbb{F}$).*
(3) *Если аффинное отображение $f : K \to L$ имеет обратное, то это обратное $f^{-1} : L \to K$ также аффинно.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что композиция *полу*аффинных отображений полуаффинна — если отображения f и g переводят равные векторы в равные, то же самое делает и их композиция $f \circ g$. Тем самым если определены отображения $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, то определено и отображение $\widetilde{f \circ g}$.

Докажем утверждение 2: пусть U, V, W — векторные пространства, которым параллельны K, L, M. Тогда $\widetilde{f \circ g} : U \to W$ задается равенством $\widetilde{f \circ g}(u) = (f \circ g)(k+u) - (f \circ g)(k) = f(g(k+u)) - f(g(k)) = f(g(k) + \tilde{g}(u)) - f(g(k)) = \tilde{f}(\tilde{g}(u)) = (\tilde{f} \circ \tilde{g})(u)$.

Теперь утверждение 1 очевидно: если $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ определены и линейны, то отображение $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ определено и линейно (поскольку композиция линейных отображений линейна).

Утверждение 3 вытекает из того, что отображение, обратное к линейному, также линейно. □

Следствие 1. *Обратимые аффинные преобразования пространства L образуют группу преобразований (обозначаемую $\mathrm{Aff}(L)$).*

Пример 1. Пусть L — аффинное пространство, паралллельное векторному пространству V, и пусть $v \in V$. Отображение $T_v : L \to L$, заданное формулой $T_v(a) = a + v$, называется параллельным переносом аффинного пространства L на вектор v. Если $w \in V$, то по определению имеем $\widetilde{T_v}(w) = T_v(a + w) - T_v(a) = (a + w + v) - (a + v) = w$, то есть $\widetilde{T_v} = \mathrm{id}$ независимо от вектора v. Тождественное преобразование линейно, так что параллельный перенос — аффинное преобразование.

Имеем также $T_{v_1}(T_{v_2}(a)) = T_{v_1}(a + v_2) = (a + v_2) + v_1 = a + (v_1 + v_2)$ по определению аффинного пространства; иными словами, $T_{v_1} \circ T_{v_2} = T_{v_1+v_2}$ — композиция параллельных переносов на векторы v_1 и v_2 тоже параллельный перенос — на вектор $v_1 + v_2$. Заметим также, что $T_0 = \mathrm{id}$, откуда вытекает, что $T_v^{-1} = T_{-v}$ — любой параллельный перенос обратим и его обратное — тоже параллельный перенос, на противоположный вектор. Отсюда следует, в частности, что параллельные переносы образуют группу преобразований аффинного пространства, обозначаемую $\mathcal{T}(L)$. Это подгруппа в группе $\mathrm{Aff}(L)$.

Пример 2. Векторное пространство V является одновременно аффинным (параллельным самому себе). Пусть W — еще одно пространство ($W = V$ не исключается), и $f : V \to W$ — отображение, для которого $f(0) = 0$. Такое преобразование полуаффинно, если для любых $v_1, v_2 \in V$ имеем $f(v_1+v_2)-f(v_1) = f(v_2)-f(0) = f(v_2)$, то есть $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ (аддитивность). В этом случае $\tilde{f}(v) = f(v) - f(0) = f(v)$, то есть $\tilde{f} = f$. Тем самым отображение векторных пространств, переводящее 0 в 0, аффинно тогда и только тогда, когда линейно.

Пусть теперь $f : V \to W$ — произвольное аффинное отображение, и $f(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} b \in W$. Пусть $T_{-b} : W \to W$ — параллельный перенос; тогда композиция $g \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_{-b} \circ f$ — аффинное отображение (по теореме 1), переводящее 0 в 0 — следовательно, $g(v) = Av$ для некоторого $A \in \mathrm{Lin}(V, W)$ и произвольного $v \in V$ (аргумент линейного отображения часто пишут без скобок, как “произведение матрицы на вектор”). Следовательно, $f(v) = Av + b$, и это — общий вид аффинного отображения векторных пространств.

Пусть G и H — группы преобразований (множеств X и Y, возможно, различных). Отображение $F : G \to H$ называется ***гомоморфизмом***, если переводит композицию преобразований в композицию, тождественное преобразование (которое есть в любой группе) в тождественное и обратное в обратное: $F(g_1 \circ g_2) = F(g_1) \circ F(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in G$, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_Y$ и $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}$ для любого $g \in G$. ***Ядром*** гомоморфизма называется множество преобразований, переводимых им в тождественное отображение.

Лемма 2. *Ядро гомоморфизма является подгруппой в группе G и инвариантно относительно сопряжения: если $x \in G$ — элемент ядра и $y \in G$ — произвольный элемент, то yxy^{-1} также лежит в ядре.*

Доказательство леммы — упражнение, или посмотрите в любом курсе алгебры, где аналогичная лемма доказана для абстрактных групп (группы преобразований являются, в частности, абстрактными группами).

На этом языке утверждение 2 теоремы 1 звучит так:

Теорема 1, утверждение 2’. *Отображение $\mathrm{Aff}(L) \to \mathrm{GL}(V)$, сопоставляющее аффинному преобразованию f линейное преобразование $\tilde{f}$, является гомоморфизмом групп преобразований.*

Кроме того, это утверждение можно уточнить:

Теорема 1, утверждение 2’, продолжение. *Образ этого гомоморфизма — вся группа $\mathrm{GL}(V)$ (такое называется эпиморфизмом), а ядро — множество параллельных переносов пространства L.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{GL}(V)$. Зафиксируем точку $a \in L$ и определим преобразование $f : L \to L$ формулой $f(a + v) = a + Av$, где $v \in V$ — произвольный вектор. Для любых $b = a + v, c = a + w = b + (w - v)$ имеем $f(c) - f(b) = Aw - Av = A(w - v)$, откуда вытекает, что $f \in \mathrm{Aff}(L)$ и $\tilde{f} = A$. Тем самым доказано, что образ гомоморфизма — вся группа $\mathrm{GL}(V)$.

Пусть теперь $f \in \mathrm{Aff}(L)$ лежит в ядре, то есть $\tilde{f} = I : V \to V$ (единичный оператор). Выберем точку a и положим $v = f(a) - a$. Тогда для произвольной точки $b = a + w$ имеем $f(b) = f(a) + \tilde{f}(w) = f(a) + w = a + v + w = b + v$ — то есть $f = T_v$ (параллельный перенос). Обратно, если $f = T_v$, то $\tilde{f} = I$ — см. пример 1. □

Мелкий шрифт для знакомых с элементами теории групп. Прежде всего заметим, что векторы любого векторного пространства V по отношению к операции сложения образуют коммутативную группу; ее часто обозначают тем же символом V. Из примера 1 следует, что отображение $V \to \mathcal{T}(L)$, сопоставляющее вектору v параллельный перенос T_v, является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма тривиально (состоит только из нулевого вектора) — из определения аффинного пространства следует, что равенство $a + v = a$ возможно только при $v = 0$, так что $T_v = \mathrm{id} \Leftrightarrow v = 0$. Поскольку образом этого отображения является, очевидно, вся группа параллельных переносов (всякий параллельный перенос есть T_v для некоторого $v \in V$), гомоморфизм $v \mapsto T_v$ является изоморфизмом; группа $\mathcal{T}(L)$ изомоморфна V.

Подгруппа $\mathcal{T}(L) \subset \mathrm{Aff}(L)$ нормальна: для всякого $v \in V$ и произвольного $f \in \mathrm{Aff}(L)$ отображение fT_vf^{-1} — параллельный перенос. Это вытекает из леммы 2 и уточненного утверждения 2 теоремы 1, но можно и проверить непосредственно: для произвольной точки $a \in L$ имеем $(f \circ T_v \circ f^{-1})(a) = f(T_v(f^{-1}(a))) = f(f^{-1}(a)+v) = f(f^{-1}(a)) + \tilde{f}(v) = a + \tilde{f}(v)$, то есть $f \circ T_v \circ f^{-1} = T_{\tilde{f}(v)}$.

Фактор-группа $\mathrm{Aff}(L)/\mathcal{T}(L)$ изоморфна, по стандартной теореме, образу гомоморфизма, то есть группе $\mathrm{GL}(V)$.

Пусть G — группа преобразований множества X, и $a \in X$. Символом $\mathrm{Stab}_a \subset G$ обозначим стабилизатор точки a, т.е. множество преобразований $g \in G$ таких, что $g(a) = a$. Для любого подмножества $H \subset G$ (в частности, для подгруппы) и произвольного элемента $f \in G$ символом fHf^{-1} обозначается множество $\{fhf^{-1} \mid h \in H\}$.

Теорема 2. $\mathrm{Stab}_a \subset G$ *— подгруппа. Если* $f \in G$, *то* $f \,\mathrm{Stab}_a f^{-1} = \mathrm{Stab}_{f(a)}$.

Доказательство. Если $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_a$, то $(g_1 \circ g_2)(a) = g_1(g_2(a)) = g_1(a) = a$, так что $g_1 \circ g_2 \in \mathrm{Stab}_a$ — это подгруппа. С другой стороны, если $g \in \mathrm{Stab}_a$, то $(f \circ g \circ f^{-1})(f(a)) = f(g(f^{-1}(f(a)))) = f(g(a)) = f(a)$, так что $f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Stab}_{f(a)}$, то есть

$$f \,\mathrm{Stab}_a f^{-1} \subseteq \mathrm{Stab}_{f(a)} \tag{1}$$

Но, с другой стороны, $f^{-1}\,\mathrm{Stab}_{f(a)} f \subseteq \mathrm{Stab}_a$, а $f^{-1} f \,\mathrm{Stab}_a f^{-1} f = \mathrm{Stab}_a$, откуда следует, что включение (1) на самом деле — равенство. □

Следствие 2. *Если существует преобразование $f \in G$, переводащее точку a в точку b, то стабилизаторы точек a и b — изоморфные группы преобразований.*

Теорема 3. *Стабилизатор произвольной точки точки $a \in L$ в группе* $\mathrm{Aff}(L)$ *изоморфен группе* $\mathrm{GL}(V)$.

Доказательство. Обозначим Φ_a ограничение гомоморфизма $\mathrm{Aff}(L) \to \mathrm{GL}(V)$ (теорема 1, утверждение 2) на подгруппу $\mathrm{Stab}_a \subset \mathrm{Aff}(L)$. Мы докажем, что Φ_a — изоморфизм.

Для произвольного $C \in \mathrm{GL}(V)$ рассмотрим преобразование $f_C : L \to L$, действующее по формуле $f_C(b) = a + C(b-a)$ (второе слагаемое — образ вектора $b - a \in V$ под действием линейного преобразования C). Нетрудно убедиться, что f_C аффинно и $f_C(a) = a$ — то есть, $f_C \in \mathrm{Stab}_a$. Тем самым получилось отображение $\Lambda_a : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Stab}_a$. Это гомоморфизм групп преобразований: действительно, $\Lambda_a(C_1C_2)$ — преобразование, переводящее точку b в $\Lambda_a(C_1C_2)(b) = f_{C_1C_2}(b) = a + C_1C_2(b-a) = f_{C_1}(a + C_2(b-a)) = f_{C_1}(f_{C_2}(b)) = (\Lambda_a(C_1) \circ \Lambda_a(C_2))(b)$.

Докажем теперь, что Φ_a и Λ_a — взаимно обратные гомоморфизмы (и, тем самым, каждый из них — изоморфизм). Действительно, $\Phi_a(\Lambda_a(C))(v) = \widetilde{f_C}(v) = f_C(a+v) - f_C(a) = Cv$, так что $\Phi_a(\Lambda_a(C)) = C$, то есть $\Phi_a \circ \Lambda_a = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}(V)}$. Обратно, пусть $f \in \mathrm{Stab}_a$ (то есть f аффинно и $f(a) = a$); тогда $\Lambda_a(\Phi_a(f)) = \Lambda_a(\tilde{f})$ — аффинное преобразование, переводящее точку $b \in L$ в $a + \tilde{f}(b-a) = f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$. Иными словами, $\Lambda_a(\Phi_a(f)) = f$, то есть $\Lambda_a \circ \Phi_a = \mathrm{id}_{\mathrm{Aff}(L)}$. □

Мелкий шрифт про полуаффинные отображения.

Пример 3. Пример полуаффинного, но не аффинного отображения: пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (комплексные числа). Само множество $\mathbb{C}$ является векторным а, следовательно, и аффинным пространством над полем $\mathbb{C}$. Отображение, заданное формулой $f(z) = \overline{z}$, аддитивно и, следовательно (пример 2), полуаффинно. Но оно не линейно (и, следовательно, не аффинно): если $t \in \mathbb{C}$, но $t \notin \mathbb{R}$, то $f(tz) = \overline{t} f(z) \neq t f(z)$.

Оказывается, для аффинных пространств над полем $\mathbb{R}$ подобного примера не существует! см. дополнительный листок 5А, в котором объясняется, кроме того, связь полуаффинности и чисто алгебраического понятия — множества автоморфизмов поля $\mathbb{F}$.

Пусть L — аффинное пространство, параллельное векторному пространству V над полем $\mathbb{F}$. Как мы помним из лекции 2, для любого векторного пространства W множество решений линейного уравнения $\ell(v) = c$ (где $\ell : W \to \mathbb{F}$ — линейный функционал, а $c \in \mathbb{F}$) является аффинным подпространством в W; если W конечномерно, а $\ell \not\equiv 0$, то это подпространство имеет размерность, на единицу меньшую, чем W (докажите!) — такие подпространства называются (аффинными) гиперплоскостями в W. Оказывается, существует способ представить любое аффинное пространство как гиперплоскость в подходящем векторном пространстве.

А именно, выберем произвольную точку $a \in L$ и рассмотрим множество W_a формальных выражений $xa + v$, где $x \in \mathbb{F}$ и $v \in V$. На этом множестве определено сложение и умножение на число:

$$(x_1 a + v_1) + (x_2 a + v_2) = (x_1 + x_2)a + (v_1 + v_2), \tag{2}$$

$$t(xa + v) = (tx)a + tv. \tag{3}$$

Теорема 4. *Формулы* (2) *и* (3) *определяют в W_a структуру векторного пространства; отображение $\ell_a : W_a \to \mathbb{F}$, заданное формулой $\ell_a(xa + v) = x$, — линейный функционал. Отображение $f_a : L \to W_a$, сопоставляющее всякой точке $b \in L$ элемент $a + (b-a) \in W_a$, является аффинным изоморфизмом из пространства L в гиперплоскость $\{w \in W_a \mid \ell_a(w) = 1\}$.*

Доказательство. Первые два утверждения теоремы очевидны. Последнее: пусть $c = b + v$, тогда $f_a(c) = a + (c - a) = a + ((b - a) + v)$ — следовательно, $f_a(c) - f_a(b) = (b - a) + v - (b - a) = v$ — не зависит от выбора точек b и c, а от выбора вектора v зависит линейно (точнее, равно ему). Следовательно, отображение f_a аффинно. Оно также взаимно однозначно (биективно, обратимо): если $\ell_a(w) = 1$, то $w = a + v = f_a(a + v)$ (в левой части $a + v \in W_a$, а в правой — $a + v \in L$, результат откладывания вектора $v \in V$ от точки a). □

Замечание 1. Если $b = a + w \in L$ — другая точка аффинного пространства, то между W_a и W_b существует естественный линейный изоморфизм: $\Phi_{ab}(xa + v) = xb + (-xw + v)$ (линейность очевидна, а обратный изоморфизм это $\Phi_{ba}(xb + v) = xa + (xw + v)$).

Замечание 2. Пространство W_a содержит пространство V в качестве векторного подпространства, заданного условием $\ell_a(w) = 0$ — оно состоит из векторов вида $w = 0 \cdot a + v$, $v \in V$.

Пусть теперь V конечномерно: $\dim V = n$. Назовем набор точек $a_0, \dots, a_n \in L$ аффинным репером (термин не общепринятый), если векторы $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ — базис в V.

Теорема 5. (1) *Точки $a_0, \dots, a_n$ — аффинный репер тогда и только тогда, когда они не лежат ни в каком собственном аффинном подпространстве $L' \subset L$.*

(2) *Отождествим L с гиперплоскостью в пространстве W_a, как описано выше. Тогда набор точек $a_0, \dots, a_n$ является аффинным репером тогда и только тогда, когда он является базисом в W_a.*

Собственным подмножеством (подпространством и т.п.) множества X называется подмножество X, отличное от самого X.

Доказательство теоремы 5. Пусть $a_0, \dots, a_n \in L'$, где $L' \subset L$ — подпространство, параллельное подпространству $V' \subset V$. Тогда $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \in V'$, но $\dim V' < \dim V = n$, так что векторы линейно зависимы и базиса не образуют.

Обратно, пусть $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ — не базис в V, то есть их линейная оболочка $V' = \langle a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle$ — собственное подпространство V. Проведем через точку a_0 аффинное подпространство L', параллельное V' (в лекции 1 доказывалось, что это всегда можно сделать, причем единственным образом) — тогда $a_i = a_0 + (a_i - a_0) \in L'$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Линейная оболочка $\langle a_0, \dots, a_n \rangle \subset W_a$ совпадает, как нетрудно заметить, с линейной оболочкой векторов $\langle a_0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle \subset W_a$. Если $a_0, \dots, a_n$ — не аффинный репер, то $\langle a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle = V' \subset V$ — собственное подпространство. Тогда $\langle a_0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle = \langle \{a_0\} \cup V' \rangle$ имеет размерность не больше $1 + \dim V' \le 1 + (n-1) = n$ и, таким образом, не совпадает с W_a ($\dim W_a = n+1$). Следовательно, $a_0, \dots, a_n$ не базис. С другой стороны, $a_0 \notin V \subset W_a$ (поскольку $\ell_a(a_0) = 1$, но $\ell_a(v) = 0$ при $v \in V$), откуда $\dim\langle \{a_0\} \cup V \rangle = 1 + \dim V = n + 1$, так что $\langle \{a_0\} \cup V \rangle = W_a$. Если $a_0, \dots, a_n$ — не базис, то $\langle a_0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \ne W_a$, откуда $\langle a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle \ne V$, так что векторы $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ линейно зависимы, и $a_0, \dots, a_n$ не является аффинным репером. □

Если в пространстве L зафиксирован аффинный репер, то произвольная точка $b \in L$ однозначно представляется, согласно теореме 5, в виде $b = a_0 + v = a_0 + x_1(a_1 - a_0) + \dots + x_n(a_n - a_0)$ для некоторых чисел $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$. Пусть L — аффинная гиперплоскость в пространстве W_a (для произвольной точки a, не связанной с b и a_i); тогда $b = (1 - x_1 - \dots - x_n)a_0 + x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \stackrel{\text{def}}{=} x_0 a_0 + \dots + x_n a_n$, где по определению $x_0 = 1 - x_1 - \dots - x_n$. Такие числа $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{F}$, сумма которых равна 1, называются барицентрическими координатами точки $b \in L$ относительно репера $a_0, \dots, a_n$; выражение $x_0 a_0 + \dots + x_n a_n$ называется барицентрической комбинацией точек $a_0, \dots, a_n$ с весами $x_0, \dots, x_n$ (термин не общепринятый, по аналогии с линейной комбинацией).

Теорема 6. *При произвольной перестановке точек в аффинном репере он остается аффинным репером. Для любой перестановки σ номеров $0, \dots, n$ барицентрические координаты точки b относительно "переставленного" репера $a_{\sigma(0)}, \dots, a_{\sigma(n)}$ равны $x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ (подвергаются той же перестановке; иными словами, в записи $b = x_0 a_0 + \dots + x_n a_n$ от перемены мест слагаемых сумма не меняется).*

Первое утверждение теоремы сразу вытекает из теоремы 5 (из любого из двух ее утверждений). Доказательство второго утверждения — упражнение.

Теорема 7. *Пусть $a_0, \dots, a_n \in L$ — аффинный репер. Тогда для любых $(n + 1)$ точек $b_0, \dots, b_n \in K$ существует и единственно аффинное отображение $f : L \to K$ такое, что $f(a_i) = b_i$ для всех $i = 0, \dots, n$. Отображение f переводит точку $x_0 a_0 + \dots + x_n a_n$ в точку $x_0 b_0 + \dots + x_n b_n$ для любых наборов барицентрических координат $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{F}$, $x_0 + \dots + x_n = 1$. Отображение f обратимо тогда и только тогда, когда $b_0, \dots, b_n \in K$ — аффинный репер.*

Доказательство. Пусть $f : L \to K$ — аффинное отображение. Тогда $f(x_0 a_0 + \dots + x_n a_n) = f(a_0 + x_1(a_1 - a_0) + \dots + x_n(a_n - a_0)) = f(a_0) + \tilde{f}(x_1(a_1 - a_0) + \dots + x_n(a_n - a_0))$ (по определению отображения $\tilde{f}$). Отображение $\tilde{f}$ линейно (поскольку f аффинно), следовательно, $f(x_0 a_0 + \dots + x_n a_n) = x_1 \tilde{f}(a_1 - a_0) + \dots + x_n \tilde{f}(a_n - a_0) = f(a_0) + x_1(f(a_1) - f(a_0)) + \dots + x_n(f(a_n) - f(a_0))$ (по определению $\tilde{f}$) $= x_0 f(a_0) + \dots + x_n f(a_n)$.

Пусть теперь $a_0, \dots, a_n$ — аффинный репер в L. Отождествим L с гиперплоскостью в пространстве W_a, тогда по теореме 5 $a_0, \dots, a_n$ — базис в W_a. Также отождествим K с гиперплоскостью в пространстве U_b; тогда существует линейное отображение $f : W_a \to U_b$, переводящее a_i в b_i для всех $i = 0, \dots, n$. Образом $L \subset W_a$ будет аффинное подпространство, натянутое на $b_0, \dots, b_n$ — следовательно, $f(L) \subset K$. Отображение f линейное и, следовательно, аффинное, поэтому его ограничение $f|_L : L \to K$ также аффинно (докажите!). Следовательно, аффинное отображение с нужными свойствами существует. По теореме 7 всякая точка $a \in L$ однозначно представима в виде $x_0 a_0 + \dots + x_n a_n$ — следовательно, по доказанному в предыдущем абзаце ее образ однозначно определен, так что f единственно.

Доказательство последнего утверждения такое же, как для соответствующего утверждения про линейные отображения и базисы; подробности оставляются в качестве упражнения. $\square$

Пусть W — векторное пространство, а $L \subset W$ — гиперплоскость в нем.

Теорема 8. *Для всякого линейного преобразования $A : W \to W$, переводящего L в себя, ограничение $A|_L : L \to L$ является аффинным преобразованием. Всякое аффинное преобразоваие $B : L \to L$ может быть получено таким образом. Если $B = A|_L$ обратим, то A определен однозначно и также обратим.*

Доказательство. Линейное преобразование $A : W \to W$ является аффинным (пример 2 лекции 5), так что ограничение $A|_L : L \to L$ (если оно определено, то есть $A(L) \subset L$) — также аффинное преобразование.

Напомним, что векторное пространство V, которому параллельно аффинное пространство L — гиперплоскость $V \subset W$, проходящая через 0 и параллельная (в обычном смысле) L. Если аффинная гиперплоскость $L \subset W$ — множество векторов $w \in W$ таких, что $\ell(w) = 1$ (где $\ell \in W^*$ — ненулевой линейный функционал), то V — множество векторов $w \in W$ таких, что $\ell(w) = 0$.

Пусть $B : L \to L$ — аффинное преобразование; продолжим его до линейного преобразования $A : W \to W$, сохраняющего L. А именно, если $w \in V \subset W$, то положим $Aw \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{B}w \in V$. Если же $w \notin V$, то $\ell(w) \neq 0$, откуда $\lambda w \in L$ при $\lambda = 1/\ell(w) \neq 0$. В этом случае положим $Aw \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda} B(\lambda w)$. Очевидно, A сохраняет L; докажем линейность.

Если вектор w таков, что $\lambda w \in L$, и $v = \nu w$, то $\lambda/\nu v \in L$. Отсюда $A(v) = \nu/\lambda B(\lambda/\nu v) = \nu/\lambda B(\lambda w) = \nu A(w)$ — однородность доказана (случай $w \in V$ разберите самостоятельно). Если $\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2 \in L$ и $w = w_1 + w_2$, то $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} w = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 w_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 w_2 \in L$ (точка с барицентрическими координатами $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ — их сумма равна 1 — по отношению к точкам $\lambda_1 w_1$ и $\lambda_2 w_2$. Тогда $A(w) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} B(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 w_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 w_2)$ — точка с теми же барицентрическими координатами по отношению к точкам $B(\lambda_1 w_1)$, $B(\lambda_2 w_2)$ (поскольку B аффинно). То есть $A(w) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_1 w_1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_2 w_2)) = A(w_1) + A(w_2)$ — аддитивность доказана. Случаи, когда $w_1 \in V$ и/или $w_2 \in V$ и/или $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, разберите самостоятельно. $\square$