ЛЕКЦИЯ 8

Аннотация. Определители.

0. Пример: ориентированные площади

Напомним, что в лекции 7 мы ввели понятие ориентированного объема и в одном случае — в пространстве размерности $n = 2$ — построили пример ориентированного объема. Построение, однако, не слишком строгое, т.к. использует понятие площади плоской фигуры, которое мы не определяли. Оказывается, однако, что доказанные в той же лекции свойства ориентированного объема позволяют описать его в этом случае полностью — перечислить явно все ориентированные объемы.

Действительно, пусть e_1, e_2 — базис в двумерном пространстве над $\mathbb{R}$. Пару произвольных векторов разложим по этому базису: $a_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$, $a_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$. Тогда $\operatorname{Vol}_2(a_1, a_2) = \operatorname{Vol}_2(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = \operatorname{Vol}_2(a_{11}e_1, a_{21}e_1) + \operatorname{Vol}_2(a_{11}e_1, a_{22}e_2) + \operatorname{Vol}_2(a_{12}e_2, a_{21}e_1) + \operatorname{Vol}_2(a_{12}e_2, a_{22}e_2) = a_{11}a_{21}\operatorname{Vol}_2(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}\operatorname{Vol}_2(e_2, e_1) + a_{12}a_{22}\operatorname{Vol}_2(e_2, e_2)$. По лемме 3 лекции 7 первое и последнее слагаемое равны нулю, а по лемме 5 лекции 7 коэффициенты в двух оставшихся отличаются знаком. Тем самым окончательно выходит, что

$$\operatorname{Vol}_2(a_1, a_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2). \tag{1}$$

Тем самым если известно число $\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2)$, то функция Vol_2 определена однозначно. Само это число может быть любым: действительно, для всякой константы $\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2)$ можно *определить* функцию Vol_2 формулой (1). Как нетрудно проверить, она обладает всеми требуемыми свойствами:

Однородность: очевидно, $ta_1 = (ta_{11})e_1 + (ta_{12})e_2$, откуда $\operatorname{Vol}_2(ta_1, a_2) = (ta_{11}a_{12} - ta_{12}a_{21})\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2) = t\operatorname{Vol}_2(a_1, a_2)$, и аналогично для второго аргумента.

Второе свойство (сложение аргументов): очевидно, $a_1 + a_2 = (a_{11} + a_{21})e_1 + (a_{12} + a_{22})e_2$, откуда $\operatorname{Vol}_2(a_1 + a_2, a_2) = ((a_{11} + a_{21})a_{22} - (a_{12} + a_{22})a_{21})\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\operatorname{Vol}_2(e_1, e_2) = \operatorname{Vol}_2(a_1, a_2)$, и аналогично для второго аргумента.

Таким образом, всевозможные ориентированные объемы (площади) на плоскости отличаются множителем (образуют одномерное векторное пространство)

Аналогичные рассуждения для произвольной размерности тоже верны, но требуют алгебраической подготовки.

1. Алгебраическое продолжение: определители

Свойства ориентированного объема, описанные в лекции 7, показывают, что имеет смысл рассмотреть его аналог для векторного пространства $\mathbb{F}^n$ над *произвольным* полем $\mathbb{F}$. Соответствующая функция (с фиксированной нормировкой, см. ниже) называется определителем и обозначается $\det$. Подчеркнем, что если $\mathbb{F} \neq \mathbb{R}$, то определитель уже не имеет прямого отношения к объему (даже для $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Определение 1. Определителем называется функция $\det : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ (то есть $\mathbb{F}$-значная функция n аргументов, каждый из которых — вектор в $\mathbb{F}^n$), удовлетворяющая определению ориентированного объема и такая, что $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, где $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{F}^n$ — стандартный базис ($e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-ом месте; $i = 1, \dots, n$).

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}^n$ — произвольные векторы (количество векторов равно размерности пространства, это важно!). Если $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ — координаты i-го вектора, то все эти координаты можно собрать в квадратную ($n \times n$) матрицу $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le n}$ (т.е. векторы $a_1, \dots, a_n$ — строки матрицы A). Тогда можно считать, что $\det$ — функция $\operatorname{Mat}(n, n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, определенная на векторном пространстве матриц $n \times n$, элементы которых лежат в поле $\mathbb{F}$. В этом случае пишут $\det A$ вместо $\det(a_1, \dots, a_n)$ (и это более частое обозначение).

Теорема 1. (1) *Функция* $\det$ *существует и единственна. Имеет место формула*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{2}$$

(2) *Если* $\mathrm{Vol}_n : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ *— произвольный ориентированный объем, то*
$$\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_n) = \det A \cdot \mathrm{Vol}_n(e_1, \dots, e_n),$$
где $e_1, \dots, e_n$ *— стандартный базис.*

(3) $\det AB = \det A \det B$, *где* $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ *— произвольные матрицы* $n \times n$.

Доказательство. Обозначим (временно) $P(A)$ правую часть равенства (2) и докажем вначале утверждение 2 (про ориентированный объем), где под $\det A$ будем понимать $P(A)$ (тот факт, что это одно и то же, мы докажем позднее). Согласно лемме 4' лекции 7, ориентированный объем Vol_n линеен по каждому аргументу. Применяя свойство линейности последовательно к первому, второму и так далее аргументу выражения $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{Vol}_n(a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n, \dots, a_{n1}e_1 + \dots + a_{nn}e_n)$, получим в конце концов $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \mathrm{Vol}_n(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, где сумма берется по всевозможным отображениям $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Если отображение σ — не биекция, то среди векторов $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$ есть одинаковые, так что из леммы 3 лекции 7 вытекает, что $\mathrm{Vol}_n(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$ — соответствующий член в сумму не входит. Если же σ — биекция (то есть перестановка), то, согласно следствию 4 из лекции 7, $\mathrm{Vol}_n(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{Vol}_n(e_1, \dots, e_n)$, что и дает равенство $\mathrm{Vol}_n(a_1, \dots, a_n) = P(A)\mathrm{Vol}_n(e_1, \dots, e_n)$.

Из этого немедленно вытекает единственность det: по определению, det — ориентированный объем, так что он удовлетворяет утверждению 2. С учетом того, что $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, получаем, что $\det(a_1, \dots, a_n)$ задается формулой (2) и, следовательно, единствен.

Для доказательства существования просто *определим* функцию det формулой (2) и проверим, что она обладает требуемыми свойствами. Свойство $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ очевидно: в этом случае A — единичная матрица, и сумма (2) содержит только одно ненулевое слагаемое $a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = 1$.

Проверим свойство однородности. Заметим, что в каждый моном суммы (2) входит (в степени 1) ровно одна координата от каждого из n векторов $a_1, \dots, a_n$. Это означает, что каждый такой моном как функция от $a_1, \dots, a_n$ однороден по каждому аргументу: если $a_i = tb$, то есть $a_{ij} = tb_j$ для всех $j = 1, \dots, n$, то $a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = ta_{1\sigma(1)} \dots b_{\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Следовательно, вся сумма (2) тоже однородна.

Для доказательства второго свойства ориентированного объема (подстановка суммы аргументов) вычислим: $\det(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (a_{i\sigma(i)} + a_{j\sigma(i)}) \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det(a_1, \dots, a_n) + \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)}$; обозначим сумму во втором слагаемом Z и докажем, что она равна нулю. Слагаемые в Z, соответствующие перестановкам σ и $\sigma(ij)$, отличаются знаком — переменные там одни и те же, а четность перестановок разная по теореме 2 лекции 7. Очевидно, все перестановки можно разбить на пары, где в каждую пару входит какая-то перестановка σ и перестановка $\sigma(ij)$ (повторное умножение на (ij) дает опять перестановку σ). Слагаемые, соответствующие перестановкам из каждой пары, сокращаются, поэтому $Z = 0$ и второе свойство ориентированного объема для определителя доказано.

Тем самым формула (2) задает ориентированный объем — мы доказали тем самым, что определитель существует.

Для доказательства утверждения 3 (об определителе произведения) рассмотрим функцию n аргументов-векторов $f(a_1, \dots, a_n) = \det(Ba_1, \dots, Ba_n) = \det AB$ (напомним, что $a_1, \dots, a_n$ — строки матрицы A). Очевидно, f обладает всеми свойствами ориентированного объема, так что согласно утверждению 2 теоремы имеем $\det AB = f(a_1, \dots, a_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n) = \det A \det B$. □

Пример 1. Рассмотрим множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Оно двумерно; базис в нем составляют числа 1 и i: комплексное число по определению единственным способом записывается в виде $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{C}$ также является одномерным векторным пространством над $\mathbb{C}$, но это нам сейчас не так важно.) Для произвольного $z \in \mathbb{C}$ обозначим $M_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ отображение умножения на z: $M_z(w) = zw$. Оно линейно над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$ тоже линейно, но нам нужно не это), и ее матрица в базисе $1, i$ есть $M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Тогда $\det M_z = a^2 + b^2$ (проверьте!), то есть $\det M_z = |z|^2$.

Из определения M_z вытекает, что $M_{z_1}M_{z_2} = M_{z_1z_2}$. Из утверждения 3 теоремы следует теперь, что $|z_1z_2| = (\det M_{z_1z_2})^{1/2} = (\det M_{z_1}M_{z_2})^{1/2} = (\det M_{z_1})^{1/2}(\det M_{z_2})^{1/2} = |z_1|\,|z_2|$. Конечно, это утверждение можно проверить и непосредственно, но тогда замечание, что $|z_1z_2|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2$ раскладывается на множители (равно $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2\,|z_2|^2$) выглядит случайным везением, в то время как доказательство при помощи определителя раскрывает его смысл.

Следствие 1. *Если матрица* A *обратима, то* $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Доказательство. $AA^{-1} = I$ (единичная матрица), так что $\det A \det A^{-1} = \det I = 1$. □

Следствие 2. (1) *Если матрица* A *обратима, то* $\det A \neq 0$.

(2) $\det(a_1, \dots, a_n) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $a_1, \dots, a_n$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из следствия 1. Для доказательства утверждения 2 рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, переводящий стандартный базис $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{F}^n$ в $a_1, \dots, a_n$. Если векторы $a_1, \dots, a_n$

линейно независимы (то есть образуют базис в $\mathbb{F}^n$, то оператор $\mathcal{A}$ обратим — обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ переводит базис $a_1, \ldots, a_n$ в $e_1, \ldots, e_n$. Отсюда вытекает, что $\det A \neq 0$. Если же $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы, то $\det A = 0$ по лемме 3 из лекции 7. $\square$

Следствие 3. *Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ — базис, а $A : V \to V$ — линейный оператор. Тогда определитель матрицы оператора A в базисе $v_1, \ldots, v_n$ не зависит от базиса (т.е. для матрицы оператора A в другом базисе определитель будет таким же).*

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n \in V$ — другой базис в V, и $X = (x_{ij})$ — матрица замены базиса (т.е. $u_i = x_{i1}v_1 + \cdots + x_{in}v_n$ для всех $i = 1, \ldots, n$). Пусть A_v, A_u — матрицы оператора A в базисах v и u соответственно. Согласно задаче 3 листка 3 матрицы связаны равенством $A_u = XA_vX^{-1}$, откуда согласно следствию 1 получаем $\det A_u = \det X \det A_v (\det X)^{-1} = \det A_v$. $\square$

Следствие 3 означает, что определитель матрицы оператора $A : V \to V$ — характеристика самого оператора (а не базиса в пространстве). Существует возможность задать этот определитель, не прибегая к базисам, она будет изучена в курсе алгебры (грассмановы многочлены и внешние степени).